PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. 1. Januar 1922. Redaktionsschluß für No. 3 am 15. Januar 1922. 23. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Piccard u. E. Stahel, Über einen neuen radioaktiven Körper. S. 1.

N. v. Raschevsky, Zur allgemeinen Elektrodynamik. S. 2.

W. Schottky, Dynamisches Quantengewicht, Molekülsymmetrie und Ferromagnetismus. S. 9.

Vorträge und Diskussionen des deutschen Physikertages in Jena vom 18.—24. September 1921:

H. C. Burger, Struktur des Wolframs. S. 14.

L. Schiller, Experimentelle Feststellungen zum Turbulenzproblem. S. 14.

L. Prandtl, Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. S. 19.

E. Wiechert, Prinzipielles über Äther und Relativität. S. 25.

Besprechungen:

H. Geiger u. W. Makower, Meßmethoden auf dem Gebiete der Radioaktivität. S. 29.

The Making of reflecting surfaces. S. 29.

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen. S. 29.

H. Reichenbach, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori. S. 30.

E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. S. 30.

Handbuch der Arbeitsmethoden in der anorganischen Chemie. S. 30.

F. Ambrosius, Grundzüge der Schwachstromtechnik. S. 31.

L. Silberstein, Report on the Quantum theory of spectra. S. 31.

A. Schaub, Statik. S. 31.

A. Kopff, Die Einsteinsche Relativitätstheorie. S. 31.

C. Isenkrahe, Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie. S. 31.

L. Walther, Dynamik der Leistungsregelung von Kolbenkompressoren und -pumpen (einschl. Selbstregelung und Parallelbetrieb). S. 32.

K. Baetz, Ein neues Prinzip für Dampf- und Gasturbinen. S. 32.

Personalien. S. 32.

Angebote. S. 32.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einen neuen radioaktiven Körper.

Von A. Piccard und E. Stahel.

Die von uns ausgesprochene Hypothese über die Anfangsglieder der *Ac*-Reihe (Arch. Sept. 1921, S. 541) läßt sich in folgendes Schema zusammenfassen:

$$AcUI \xrightarrow{-\alpha} AcThI \xrightarrow{-\beta} AcBv \xrightarrow{-\beta}$$
$$AcUII \xrightarrow{-\alpha} AcThII \xrightarrow{-\beta} Pa \rightarrow$$

Es müßten danach zwischen Uran und Protactinium zwei *Th*-Isotope der *Ac*-Reihe vorhanden sein; das eine von ihnen, das *UY*, ist längst bekannt, das andere kann mit dem von uns gefundenen neuen Körper identisch sein.

Aus gut gereinigtem Uranylnitrat wird nach der Äther-Wasser-Methode das *UX* angereichert und dann mit Cer-Fluorid gefällt. Das Präparat wird über längere Zeit messend verfolgt (die ersten Messungen datieren vom 18. Januar 1921). Während die harte β-Strahlung (gemessen durch 0,1 mm *Al*) den regelmäßigen Abfall des UX_1 zeigt (Halbwertszeit bestimmt zu $24.52 \pm 0{,}05$ Tage) ergibt sich, daß die weiche Strahlung mit zunehmendem Alter des Präparates immer langsamer abnimmt und gleichzeitig die Strahlung immer weicher wird, ein Zeichen dafür, daß sich im Präparat ein weich strahlender Körper befindet, der langsamer als *UX* zerfällt. Aus der anfangs gemessenen Aktivität des *UX* läßt sich dessen Stärke in jedem Moment berechnen; der Überschuß der beobachteten Aktivität über die berechnete rührt von dem neuen Körper her, den wir, bevor seine definitive Stellung im Zerfallsschema feststeht, mit *UV* bezeichnen wollen. Als Halbwertszeit ergibt sich ca. 48 Tage, also gerade doppelt soviel wie für UX_1.

Ausgehend von 50 kg Uran (das uns von der Universität Brüssel zur Verfügung gestellt wurde), war es uns möglich, so starke $UX + UV$-Präparate darzustellen, daß wir heute, nachdem *UX* bereits auf etwa $^1/_{1000}$ gesunken ist, doch noch Absorptionskurven aufnehmen können. Nach Abzug der noch vorhandenen $UX_1 + UX_2$-Strahlung bleibt eine sehr weiche β-Strahlung von etwa 0,003 mm *Al* Halbierungsdicke, entsprechend einem Absorptionskoeffizienten von 2300 cm^{-1} *Al*.

Unter Zugrundelegung der oben angegebenen Halbwertszeiten von *UX* und *UV* läßt sich das Verhältnis der Aktivitäten dieser Körper im Moment der Trennung vom *U* berechnen. Es ergibt sich, daß das *UV* ein Glied der *Ac*-Reihe sein kann. Unbestimmt ist noch, ob *UY* das erste und *UV* das zweite Thorisotope in dem eingangs erwähnten Zerfallsschema ist oder umgekehrt.

Zürich, Eidg. techn. Hochschule.

(Eingegangen 26. November 1921.)

Zur allgemeinen Elektrodynamik.

Von N. v. Raschevsky.

Einleitung. In letzter Zeit tritt die Notwendigkeit, die allgemeine Elektrodynamik zu modifizieren, mehr und mehr zutage. Die Erscheinungen, die alle zusammengefaßt, den Inhalt der quantentheoretischen Betrachtungen bilden, zeigen ganz bestimmt, daß die klassische Elektrodynamik in der Form, wie sie durch Maxwell-Lorentzsche Differentialgleichungen gegeben ist, in einem gewissen, und zwar recht umfangreichen Gebiete nicht anwendbar ist. Freilich aber beschäftigt sich die Quantentheorie mit der Elektrodynamik fast gar nicht. Sie löst die Schwierigkeiten, die hier auftreten, indem sie neben der Annahme klassischer Gleichungen, neue, mit diesen in vollem Widerspruch stehende Hypothesen macht. Die Relativitätstheorie, die sich auf die Elektrodynamik als Grundlage stützt, löst die Frage wiederum nicht. Sogar mehr, der Standpunkt, welchen die Relativitätstheorie annimmt, scheint wenig Hoffnung für die Lösung der Frage zu geben. Denn, während wir vor dem Problem stehen, die Grundgleichungen der Elektrodynamik zu verallgemeinern, und also bis zu einem gewissen Grade zu modifizieren, sieht sie die Relativitätstheorie als das fundamentalste an, was unsere Wissenschaft gibt, und fragt, wie man die Vorstellung von Raum und Zeit zu verändern hat, um diese Gleichungen unverändert zu lassen.

Zwar versuchte Herr Mie[1] eine Verallgemeinerung der Elektrodynamik vorzunehmen, indem er die Abhängigkeit E von D und H von B nicht mehr in der üblichen Weise annimmt, aber diese Verallgemeinerung kann nicht als genügend angesehen werden. Versucht man dagegen den Ausdruck für den Strom zu modifizieren, indem man eine allgemeinere Beziehung zwischen Strom- und Ladungsdichte einerseits und Stromdichte und Geschwindigkeit andererseits annimmt, was, wie wir später sehen werden, als sehr erwünscht erscheint, so verlieren unsere Gleichungen ihre Invarianz gegen die Lorentz-Transformation, und wir gelangen zu einem Widerspruch mit der Relativitätstheorie.

Allerdings, falls es uns gelingt unter Beibehaltung der klassischen Vorstellungen über Raum und Zeit eine Theorie aufzubauen, welche ohne inneren Widerspruch alle bekannten Tatsachen zu erklären vermag, die bis jetzt nur die Relativitätstheorie erklärte, und zur selben Zeit, wenn auch nicht völlige Erläuterung, so doch wenigstens einige Hoffnungen bezüglich der am Anfang erwähnten Tatsachen gibt, so ist dadurch unserer Theorie ihre Existenzberechtigung gegeben.

Eine solche Theorie wurde von W. Ritz[1]) vorgeschlagen. Unter Zugrundelegung nur relativer Geschwindigkeiten ist es ihm gelungen, eine Anzahl von Hypothesen aufzustellen, welche alle ungezwungen die Tatsachen der Elektrodynamik erklärten. Zwei schwerwiegende Bedenken sind aber gegen die Ritzschen Anschauungen zu wenden. Erstens, wie Ritz selbst einsah, erklärt seine Theorie die partielle Mitführung des Lichtes in bewegten Körpern nicht, indem sie eine vollständige Mitführung verlangt, und zweitens sind astronomische Tatsachen mit der Ritzschen Annahme über die Lichtgeschwindigkeit nicht verträglich.

Dagegen hebt die von mir[2]) veröffentlichte Hypothese meines allzufrüh verstorbenen Freundes Nikolai Paschsky[3]) beide Schwierigkeiten auf, und es liegt der Gedanke nahe, unter der Annahme dieser Hypothese die Ritzsche Formel für die elementare Kraft zu behalten. Wie es sich zeigen wird, führt diese Kombination zu vollem Erfolg.

Das Paschsky-Prinzip, dessen ausführlichere Begründung in dem obenerwähnten Artikel bald erscheinen wird, besteht kurz im folgenden: die Lichtgeschwindigkeit des von einem mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Leuchtpunktes ausgesandten Lichtes, bezogen auf ein mit dem Leuchtpunkt mitbewegtes Achsensystem, ist durch die Gleichung

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{1 + \varkappa \cos\varphi} \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{\psi}{\sigma + \psi}};$$

gegeben. Dabei bedeutet φ den Winkel, welchen der Lichtstrahl mit der Bewegungsrichtung einschließt; ψ und σ sind Funktionen von v, die den Bedingungen genügen:

$$\psi(0) = 0 \qquad \sigma(0) = c \text{ (Lichtgeschwindigkeit)}.$$

Geometrisch gedeutet besteht die Hypothese darin, daß der Hodograph der Lichtgeschwindigkeiten, auf mitbewegte Achsen bezogen, ein Rotationsellipsoid mit dem Leuchtpunkt in einem der Brennpunkte ist.

Daß der Michelson-Versuch durch diese Annahme erklärt wird, leuchtet ein. Denn bedeutet l den Halbmesser einer bewegten Kugel,

1) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie. Ann. d. Phys. 37, 39, 40 (1912/13).

1) W. Ritz, Ann. d. Chim. et de Phys. 8, t. XIII. 145. Gesammelte Werke S. 317.

2) N. Raschevsky, Lightemission from a moving source in connection with the relativity theory. Erscheint in Kürze in Phys. Rev.; eingesandt April 1921.

3) Gestorben den 26. Juni 1918.

in dessen Mittelpunkt O sich die Lichtquelle befindet, so ist die Zeit, welche das Licht bedarf, um aus O in einer Richtung φ bis auf die Kugelfläche zu kommen, gleich

$$T_1 = \frac{l}{\sigma_\varphi} = \frac{l(1 \pm \varkappa \cos\varphi)}{\sigma}.$$

Die Rückkehrzeit, falls wir den reflektierenden Punkt als selbsttätige Quelle betrachten, ist

$$T_2 = \frac{l(1 \mp \varkappa \cos\varphi)}{\sigma} = \frac{l}{\sigma_{(\varphi + \pi)}}$$

und die Zeit des „Hin- und Herkommens" ist gleich

$$T_1 + T_2 = \frac{2l}{\sigma}$$

und anabhängig von der Richtung.

Dabei ist σ, wie man leicht einsieht, die „berechnete" Lichtgeschwindigkeit, falls man sie nach der Methode des „Hin- und Hergehens" des Strahles ermittelt.

Nun zeigen astronomische Beobachtungen, daß die Lichtgeschwindigkeit, in einem ruhenden System gemessen, in der Richtung der Quellenbewegung und in der Entgegengesetzten mit großer Genauigkeit denselben Wert c hat. Dies kommt darauf aus, die Annahme zu machen, daß der Leuchtpunkt im Vorderbrennpunkt des Hodographs liegt und v gleich dessen linearen Exzentrizität ist. Also

$$\sqrt{\psi^2 + \sigma\psi} = 0; \qquad \sigma + \psi = c;$$

$$\psi \text{ annähernd} = \frac{v^2}{\sigma}.$$

Der Hodograph, vom ruhenden System aus betrachtet, ist also ein Ellipsoid mit der Lichtquelle im Mittelpunkt, und die große Halbachse ist gleich c.

Falls diese Annahme auch nur annähernd zutrifft, so ist doch ψ sehr klein, höchstens von der angegebenen Größenordnung.

Grundformeln. Fall der kleinen Geschwindigkeiten. Unsere Aufgabe besteht also darin, eine Theorie zu entwickeln, welche dem Paschsky-Prinzip genügend, erstens einen Ersatz der Relativitätstheorie bieten, und zweitens als nützliche Arbeitshypothese der Entwicklung der Experimentalphysik neue Bahnen anzeigen würde.

Die Anwendung des Paschsky-Prinzips auf die Elektrodynamik ist dadurch sehr erschwert, daß die Grundgleichungen und ihre Integration höchst komplizierte werden, falls c nicht mehr als konstant angesehen wird. Eine Ableitung solcher Gleichungen für den Fall

$$v = \text{const.}$$

ist von mir gegeben und wird bald in „Physical Review" erscheinen.

Heuristisch aber ist es richtiger, aus der Integralbeziehung in der Form, wie sie das Paschsky-Prinzip verlangt, auszugehen und dann rückwärts zu den Differentialgleichungen zu kommen. Aber alsdann erscheinen diese Gleichungen als logisch überflüssig und es scheint zweckmäßiger, den von W. Ritz vorgeschlagenen Weg zu verfolgen, und als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen den Ausdruck für die elementare Kraft zwischen Punktladungen zu wählen. Dies hat auch einen anderen Vorzug. Falls wir die differenziellen Grundgleichungen als unrichtig betrachten, werden wir nicht gezwungen, den Ausdruck für die Dichte der ponderomotorischen Kraft als richtig anzusehen. Die Diskussion dieser Formel, die Erläuterung ihrer physikalischen Bedeutung gewinnt viel an Anschaulichkeit und Klarheit, wenn man die elementare Kraft betrachtet.

Wir betonen aber, daß unser Standpunkt dem Ritzschen nur in dieser Hinsicht analog ist. Was das Bild, die Vorstellung anbetrifft, welche wir uns über den Mechanismus des Vorganges machen, so lassen wir diese Frage ganz offen und stellen uns auf den rein phänomenologischen Standpunkt einer richtigen Beschreibung der Naturvorgänge. Kein mechanischer Äther, aber auch keine Partikelchen, welche in unendlich großer Zahl immer und immer emittiert werden [1]).

Es muß bemerkt werden, daß die Ritzsche Behauptung über die volle Überflüssigkeit des Feldbegriffs auch nicht ohne weiteres angenommen werden kann. Denn dort bleibt doch das Feld der Partikelgeschwindigkeiten oder das skalare Feld der Dichte D [2]). Nur dadurch, daß er für D seinen Ausdruck durch die Ladungsverteilung einsetzt, gelangt Ritz zur elementaren Kraft. In diesem Sinne können wir von einer Theorie des E.M.Feldes sprechen, wobei wir mit Ritz einverstanden sind, daß die Rolle des Feldbegriffs mehr eine mathematische ist.

In unsere Betrachtung nehmen wir die Ritzsche Formel ungeändert auf. Dies ist keineswegs als definitiv anzusehen und wird in weiteren Untersuchungen verändert werden können. Hier aber schon können wir $\frac{\partial r}{\partial n}$ nicht mehr in solch einer einfachen Form wie bei W. Ritz darstellen. Auch ist der Ausdruck

1) Wegen der Frage über die allgemeine Entbehrlichkeit des Äthers vgl. Meißner, diese Zeitschr. **8**, 185, 1921.

2) W. Ritz, l. c.

für r durch x, y, z (die momentanen Lagen), und durch x', y', z' und v' (die Aussendungslage und Geschwindigkeit), ein anderer, durch das Paschsky-Prinzip geforderter.

Die Grundformel also hat die Form

$$F_x = \frac{ee'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\cos(r,x)\,\varphi\left(\frac{u^2}{\sigma_r^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{u_x u_r}{\sigma_r^2},\frac{u_r^2}{\sigma_r^2}\right)-\frac{r\,w'_x}{\sigma_r^2}\,\chi\left(\frac{u^2}{\sigma_r^2},\frac{u_r^2}{\sigma_r^2}\right)\right]. \quad (1)$$

φ und χ haben dieselben Reihenentwicklungen wie bei Ritz, nur tritt hier anstatt c σ_r ein. Was φ anbetrifft, so können zwei Hypothesen darüber gemacht werden. Entweder ist allgemein $\varphi(v') = f(v')$ (v' = absolute Geschwindigkeit des Systems) oder $\varphi(v') = \frac{1}{\partial r/\partial n}$ und dadurch Funktion der Parameter des Hodographellipsoids und also auch von v'.

Bei $v' = 0$ ist $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$.

Die zweite Hypothese führt zur Behauptung, daß die Kraft zwischen zwei relativ zu einander ruhenden Ladungen immer

$$\frac{ee'}{r^2}$$

gleich ist, während die erste zum Ausdruck

$$\eta(v)\frac{ee'}{r^2}$$

führt, wobei $\eta(v)$ eine Funktion der absoluten Geschwindigkeit beider Ladungen ist und

$$\eta(0) = 1.$$

Das Coulombsche Gesetz ist durch beide Hypothesen erfüllt. Während aber die erste die Entdeckung einer absoluten Geschwindigkeit erlaubt, falls diese zuerst einen konstanten Wert v_1 hatte und dann einen anderen konstanten Wert v_2 annimmt, ist das bei der zweiten Annahme unmöglich. Da aber die Geschwindigkeit der Erde praktisch unveränderlich ist, so zwingt uns bis jetzt kein einziges Experiment zur zweiten Annahme, und wir werden daher die erste, allgemeinere machen.

Es ist leicht, zu zeigen, daß unsere Formel für den Fall kleiner Geschwindigkeiten dasselbe Resultat wie die Ritzsche ergibt. Wir haben nämlich:

$$r_x = x - x'\left(t-\frac{r}{\sigma_r}\right) - \frac{r}{\sigma_r}v'_x\left(t-\frac{r}{\sigma_r}\right)$$
$$r_y = \ldots\ldots \quad (2)$$
$$r_z = \ldots\ldots$$

Die Entwicklung geht dabei ganz analog der Ritzschen vor. Da aber

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{1+\varkappa\cos(v',r)}$$

ist, und da weiter, wie wir oben gesehen haben, ψ sehr klein ist, so können wir in allen Entwicklungen σ_r durch c ersetzen, und da der Hodograph mit derselben Annäherung ein sphärischer ist, so können wir auch

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{\left(1-\frac{r\,w_r}{c^2}\right)}$$

setzen, und erhalten daher die Ritzsche Näherungsformel

$$F_x = ee'\left\{\frac{\cos(\varrho,x)}{\varrho^2}+\frac{\cos(\varrho,x)}{\varrho^2 c^2}\left(au^2+bu_r^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{p\,u_x u_r}{c^2\varrho^2}-\frac{w'_x+w'_\varrho\cos(\varrho,x)}{2c^2\varrho}\right\} \quad (3)$$

wobei ϱ den augenblicklichen Abstand bedeutet, und a, b, p unbestimmte Koeffizienten sind.

Dadurch ist bewiesen, daß unsere Theorie allen aus der Elektrodynamik bekannten Tatsachen Genüge leistet.

Es bleibt nun zu zeigen, daß auch die Optik der bewegten Körper durch unsere Theorie erklärt wird.

Betrachten wir harmonische Schwingungen eines Elektrons von sehr großer Frequenz, so können wir die Geschwindigkeiten neben den Beschleunigungen ganz vernachlässigen, denn wir haben

$$w' = 2\pi\nu v,$$

wobei ν, die Frequenz, sehr groß ist.

Dann erhalten wir, wie bei Ritz, für große Entfernungen vom Vibrator eine Kraft:

$$\frac{ee'}{c^2 r}\,\frac{w'_x - w'_r\cos(r,x)}{1-\frac{r\,w'_r}{c^2}}, \quad (4)$$

die auf dem Radiusvektor r senkrecht steht und der elektrischen Kraft der klassischen Theorie entspricht.

Da diese Kraft nur von x, y, z, nicht aber von v' abhängt, so ist es gestattet, und hier sogar zweckmäßig, auf sie den Feldbegriff anzuwenden[1]).

Bei der Ableitung der Formeln für Dispersion und Mitführungskoeffizient werden wir diesen Umstand benutzen, und zu partiellen Differentialgleichungen übergehen. Dabei kehren wir aber nicht zu den allgemeinen Feldgleichungen zurück, sondern wenden die Wellengleichung auf die durch (4) gegebene Kraft an.

Wir erhalten in dieser Weise auch einen logischen Vorzug: wir betrachten nämlich den

1) Vgl. W. Ritz, Werke S. 404.

magnetischen Vektor der Lichtwelle gar nicht, der solch eine große Rolle bei der Ableitung der Feldgleichungen für dispergierende Körper in der klassischen Elektrodynamik spielt, aber praktisch, im Dispersionsvorgange selbst, gar keine Bedeutung hat.

Die im folgenden zu betrachtenden Erscheinungen gehören, wie auch die vorhergehenden, zum Gebiete der kleinen Geschwindigkeiten. Hier aber werden wir diese Bedingung etwas anders aussprechen. Wir machen die Annahme, daß die Geschwindigkeiten der lichterzeugenden Elektronen, relativ zu dem betrachteten Körper, sehr klein sind im Vergleich mit der absoluten Geschwindigkeit des Körpers im ganzen. Alsdann können wir näherungsweise die Verteilung der Lichtgeschwindigkeiten innerhalb der Materie als durch die Formel von Paschsky gegeben ansehen. Dieselbe Annahme wird eigentlich implicite auch in der heutigen Elektronentheorie gemacht, da bei der Ableitung des Fresnelschen Mitführungskoeffizienten in der Differentialgleichung des Vibrators das Glied $\frac{1}{c}[Hv]$ (v = Geschwindigkeit des Elektrons) vernachlässigt wird, während dasselbe für das Glied $\frac{1}{c}[Hw]$ (w = Translationsgeschwindigkeit der Materie) nicht der Fall ist. (H bedeutet den magnetischen Vektor der Lichtwelle)[1]).

Ferner machen wir über die Funktion ψ die vom Experiment geforderten, in der Einleitung ausführlich erörterten Annahmen. Alsdann ergibt sich leicht der Fresnelsche Mitführungskoeffizient.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir bei der Ableitung die Absorption. Diese Einschränkung hat keinen prinzipiellen Einfluß.

Auf absolut ruhende Achsen bezogen muß der elektrische Vektor der Lichtwelle der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{5}$$

(σ ist hier anstatt c gebraucht)

im leeren Raum genügen (σ ist die gemessene Lichtgeschwindigkeit).

Wir behalten unverändert die modernen Vorstellungen über die Konstitution der Materie, und erhalten demgemäß die bekannte Differentialgleichung für die Polarisation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{m} \overline{E} - \nu_0^2 P. \tag{6}$$

Hier ist neben dem Absorptionsglied auch die Einwirkung der benachbarten Moleküle auf das Dipol (wie bei Drude) vernachlässigt. $\overline{E}$ ist die mittlere elektrische Feldstärke.

Diese mittlere Feldstärke wird aber aus zwei Komponenten zusammengesetzt. Erstens aus dem Vektor E der Lichtwelle, zweitens aus der durch die Polarisation hervorgerufenen elektrischen Kraft. In einem gegebenen Punkte wird daher $\partial^2 \overline{E}/\partial t^2$ auch durch zwei Komponenten bestimmt: erstens, da sich $\overline{E}$ mit der Geschwindigkeit σ ausbreitet durch $\sigma^2 \partial^2 \overline{E}/\partial x^2$, und zweitens durch ein zu $\partial^2 P/\partial t^2$ in diesem Punkte proportionales Glied.

Wir erhalten also

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{7}$$

oder $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ aus (6) einsetzend

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x^2} + A \overline{E}\left(\frac{1}{m} - \nu_0 P\right). \tag{8}$$

Aus (6) aber haben wir

$$P = \frac{1}{\alpha} \overline{E}, \tag{9}$$

wobei

$$\alpha = m(\nu_0^2 - \nu^2) \tag{10}$$

(ν = Frequenz der Lichtwelle).

Also

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial \overline{E}}{dx^2} + \frac{A}{m} \overline{E}\left(1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2 - \nu_0^2}\right). \tag{11}$$

Setzen wir

$$\overline{E} = e^{i\nu(t - \varphi x)}, \tag{12}$$

so erhalten wir

$$\sigma^2 q^2 = n^2 = 1 + \frac{\frac{A}{m}\nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2} \tag{13}$$

Das ist die Formel der normalen Dispersion.

So einfach wird auch der Mitführungskoeffizient abgeleitet.

Für ein mit der Geschwindigkeit w sich bewegendes System nimmt (5) die Form an

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 2w \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x'} + w^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} \tag{14}$$

wegen der Relation

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + w \frac{\partial \varphi}{\partial x'}$$ [1]).

(14) bleibt ungeändert und wir erhalten daher

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} + 2w \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t \partial x'} = (\sigma^2 - w^2) \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x'^2} + \frac{A}{m} \overline{E}\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2}\right) \tag{15}$$

1) Vgl. H. Lorentz, Theory of electrons. (Teubner-Leipzig) S. 140; 185, 1909.

1) H. Lorentz, l. c. S. 184.

oder, indem man $\bar{E} = e^{i\varkappa(t-q'z)}$ setzt

$$\varkappa^2 q'^2 = 1 + \frac{\frac{A}{m}\nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2} + 2wq' - w^2 q'^2. \quad (16)$$

Erinnern wir uns, daß $q' = \frac{1}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Materie ist, so erhalten wir

$$\frac{\varkappa^2}{c^2} = n^2 + \frac{2w}{c} - \frac{w^2}{c^2}. \quad (17)$$

Vernachlässigt man Größen zweiter Ordnung und setzt σ anstatt c im vorletzten Glied, so hat man, da

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{w}{\sigma} \quad (18)$$

(σ_0 = Lichtgeschwindigkeit in ruhender Materie),

$$c = \sigma_0 - \frac{w\sigma_0}{\sigma^2} = c - \frac{w}{n^2}. \quad (19)$$

Daraus ergibt sich die absolute Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Materie

$$c + w = \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) w. \quad (20)$$

Von den optischen Erscheinungen bleibt noch der Lichtdruck übrig. Was ihn anbetrifft, so ist er eigentlich auf Zwischenwirkung der Wellen und Resonatoren zurückzuführen.

Da in unserer Theorie die Kräfte dieselben wie in der klassischen Elektrodynamik sind, so wird auch das Resultat dasselbe sein.

Allgemeine Betrachtungen. Nachdem wir die Übersicht der Prozesse mit kleinen Geschwindigkeiten vollendet haben, gehen wir zu allgemeinen elektrodynamischen Betrachtungen über.

Mit Ausnahme der oben erwähnten Beschränkungen bleiben die Funktionen φ, ϑ und χ ganz unbestimmt. Wir werden gleich auf eine wichtige Folgerung dieser Tatsache hinweisen, die von Ritz übersehen wurde.

Unsere Theorie erklärt nämlich die Ungleichwertigkeit von negativer und positiver Elektrizität.

Nehmen wir an, es existieren nur Elektronen, alle untereinander gleich, und alle mit gleicher Ladung e. Betrachten wir ein System von Elektronen, die gegenseitig ruhen oder kleine Geschwindigkeiten haben, so sind die Kräfte zwischen ihnen Abstoßkräfte. Wegen der Willkürlichkeit der Funktionen φ, ϑ und χ zwingt uns nichts zu der Annahme, daß diese Funktionen, und speziell φ, bei genügend großem n das Vorzeichen nicht ändern. Wäre aber dies der Fall, so wird die ganze Erscheinung so ablaufen, als ob wir scheinbare positive Ladungen hätten. In derselben Weise ist es leicht einzusehen, daß man auch von scheinbaren magnetischen Ladungen sprechen kann. Und da allgemein die φ, ϑ und χ nicht bei demselben Wert das Vorzeichen zu wechseln brauchen, kann es auch geschehen, daß die Gesamtkraft zwischen zwei Elektronen auch niemals gleich Null wird. Diese Gesamtkraft wird aber natürlich nicht in die Richtung von r fallen, nicht rein elektrisch sein.

Daß die bisher angestellten Versuche über Elektronen mit großen Geschwindigkeiten (Hrn. Kauffmann, Bucherer u. a.) uns nichts von dieser Erscheinung zeigten, ist wohl verständlich. Denn bei der kritischen Geschwindigkeit, bei welcher φ das Vorzeichen wechselt, ist ja die an dem Elektron angreifende Kraft gleich Null, und es verhält sich so, als ob seine Masse unendlich groß wäre. Von diesem Standpunkt aus kann man alle oben erwähnten Versuche deuten. Allerdings ist die kritische Geschwindigkeit, die wahrscheinlich nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt, durch Beschleunigung in einem elektrischen Feld nicht erreichbar. Es ist aber denkbar, zwei Elektronen eine gegenseitige Geschwindigkeit von gewünschter Größe zu erteilen.

Während also die klassische Elektrodynamik sich nicht auf die Vorstellung von Elektronen beschränken konnte, und genötigt war noch verschiedenartige positive Ladungen einzuführen, um das Vorhandensein von stabilen Systemen zu erklären, tut dies unsere Theorie ohne weiteres. Würden wir die Form von φ, ϑ und χ kennen, so würden wir auch diese stabilen Konfigurationen berechnen können. Die potentielle Energie W würde dann von φ, ϑ und χ abhängen, sowie auch von den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Elektronen. Die kinetische Energie T wird auch dadurch gegeben. Führen wir eine Funktion $L = T - W$ ein[1]), so finden wir die Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int L dt = 0. \quad (21)$$

Schreiben wir

$$\delta W = 0, \quad (22)$$

so gibt uns jede Lösung dieser Gleichung eine mögliche stabile Konfiguration.

Die Kenntnis der Funktion L würde uns also auf die Kenntnis aller Naturerscheinungen führen, vorausgesetzt, daß sie alle elektrischer Natur sind (die Gravitation kann wahrscheinlich auch eingefügt werden). Ist T nicht eine quadratische Funktion der Geschwindig-

1) Die Berechtigung dieser Einführung und die Einschränkungen, die dadurch gefordert sind, siehe weiter unten.

keiten, so würden wir eine mit der Geschwindigkeit sich ändernde Masse haben und den Massenunterschied von Elektronen und Atomkernen erklären. Doch ist hier auch ein anderer Standpunkt möglich. Die Diskussion der Frage nach der Kernstruktur, die jetzt eine ganz andere Fassung erhält, kann hier nicht eingehend durchgeführt werden.

Unsere Anschauung bietet eine gewisse Analogie zu der des Herrn Mie[1]). Es muß aber der große Unterschied betont werden. Während bei Herrn Mie die Weltfunktion von den Feldgrößen abhängt, hängt sie in unserem Fall nur von den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Elektronen ab. Wir verzichten ferner ganz auf die Lokalisation der Energie im Raume, aus Gründen, welche von W. Ritz ausführlich diskutiert wurden. Dabei nehmen wir auch Abstand von der in die heutige Physik implizite einführbaren Vorstellung der Energie, als einer Art Substanz.

Die Energie spielt bei uns die Rolle einer einfachen mathematischen Größe, die der Erhaltungsformel genügt; und das Prinzip der Erhaltung der Energie bekommt denselben Charakter wie in der Mechanik. Die Vorstellung von der Energie als einer Art Substanz hat keine innere Berechtigung. Denn man könnte in derselben Weise von Bewegungsgröße — Substanz usw. sprechen, also wieder zu den alten Fluiden zurückkehren. Andererseits entstand die Lokalisation der Energie auf Grund der Bemühungen, eine mechanische Erklärung des elektromagnetischen Feldes zu geben. Während es aber einen Sinn hatte von der Energie in gegebenen Volumen des Feldes zu reden, wenn man darunter die Energie der verschobenen, in diesen Volumen enthaltenen Ätherteilchen verstand, ist jetzt dieser Ausdruck sinnlos, da E und H nicht mehr mechanisch interpretiert werden.

Dieser Standpunkt ist mit der Vorstellung, daß die schwere Masse eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängt, ganz verträglich. Denn diese Energie ist durch Konfiguration und Geschwindigkeiten der Elektronen, welche den Körper ausbilden, gegeben. Dadurch wird aber auch die Gravitationswirkung bestimmt.

Mit der Vorstellung der Energie wird auch eine andere wichtige Frage der Physik geändert, nämlich die Frage der Ausstrahlung. Diese Frage zerfällt in zwei Teile. Erstens, falls wir annehmen, daß die Feldgesetze im Innern des Elektrons gelten[2]), so sind wir gezwungen, die gegenseitige Wirkung einzelner Elektronenteile zu berücksichtigen, und wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kräfte erhält man dabei eine Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, und die neben dem zu der Beschleunigung proportionalen Glied noch ein Glied von der Form

$$\frac{2e^2}{3}\frac{d\varpi}{dt}$$

enthält, welches die Dämpfung und daher einen Energieverlust verursacht. Um das Energieprinzip zu retten, müssen wir annehmen, daß diese Energie ausgestrahlt ist und irgendwo im Raume steckt.

Zweitens nehmen wir sogar an, daß die Elektronen nicht zum Felde gehören und Singularitätspunkte sind[1]), von deren innerer Beschaffenheit wir nichts wissen, und von deren Teilen keine Rede sein kann; betrachten wir nun ein beschleunigtes Elektron, so sehen wir, daß das Integral des Poyntingschen Vektors, über eine das Elektron umschließende Fläche genommen, von Null verschieden ist. Wiederum sind wir genötigt anzunehmen, daß das Elektron Energie verliert.

Die Lage der klassischen Elektrodynamik ist aussichtslos. Das Elektron strahlt immer, ausgenommen im Zustande der Ruhe und der gleichförmig-geradlinigen Bewegung, welche kein Interesse bieten. Die Forderung des Experimentes, der Spektrallinientheorie usw., daß die Elektronen auf einer Kreis- und sogar Ellipsenbahn nicht strahlen, kann nicht widerspruchslos mit ihr vereinigt werden.

Unsere Theorie hingegen führt einen ganz neuen Standpuukt ein. Wie es Herr Weyl tut, sehen wir das Elektron als etwas dem Felde Fremdes an. Dies bedeutet, wie Herr Weyl bemerkt, „eine vorsichtigere Stellungnahme zu dem ganzen Problem der 'Materie'"[2]). Darüber zu sprechen, wie einzelne Teile des Elektrons aufeinander wirken, wenn uns das Experiment nicht einmal lehrt, wie ganze Elektronen zusammenwirken, ist kaum zweckmäßig.

Falls es aber so ist, so zwingt uns nichts, eine dämpfende Reaktionskraft einzuführen, und unser Elektron strahlt nur dann, wenn durch Einwirkung anderer Elektronen seine Gesamtenergie vermindert wird. Diese verlorene Energie wird aber sofort von anderen Elektronen aufgenommen. Das Gesagte wird durch folgendes Beispiel illustriert.

Es sei ein schwingendes Elektron gegeben,

1) G. Mie, l. c.
2) M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II, S. 19 (Teubner 1920).

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, S. 238 (Springer 1921).
2) H. Weyl, l. c. Vorwort zur vierten Auflage.

dessen Energie teilweise potentiell, teilweise kinetisch ist. Bringen wir in seine Nähe ein anderes Elektron. Unter der Einwirkung des ersten wird das zweite Schwingungen ausführen und seinerseits auf das erste eine Kraft ausüben, welche die Amplitude des ersten vermindert. Wir gelangen dabei nur zu einem scheinbaren Widerspruch, daß, während der Zeit, welcher die Wirkung bedarf, um vom ersten bis zum zweiten Elektron zu gelangen, das erste noch seine anfängliche Amplitude behält, während das zweite schon Energie gewonnen hat.

Die Versöhnung des Widerspruches besteht darin, daß es in Realität unmöglich ist, den zweiten Dipol ganz aus dem Felde des ersten hinausschaffen und dann plötzlich hineinführen. So weit sie auch voneinander waren, waren sie doch immer in endlicher Entfernung, und ihre gegenseitige Wirkung fing in unendlicher Vergangenheit an. Es gibt keine isolierten Systeme.

Die Anwendbarkeit des Hamiltonschen Prinzips ist deshalb in unserer Theorie erlaubt, weil das Energieprinzip seine klassische Form behält. Doch zwingt dies uns, wenigstens für gewisse kleine Gebiete, das Superpositionsprinzip aufzugeben. Denn sonst wird doch ein aus Elektronen bestehendes System auf sich selbst Kräfte ausüben können, und dies würde unserer Fassung des Energieprinzips widersprechen.

Unter Annahme der Grundformel (1) haben wir daher für die Bewegungsgleichung nicht

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_i,$$

sondern (23)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi(F_i)$$

zu setzen, wobei Φ eine Funktion ist, die sich dadurch bestimmen soll, daß das Erhaltungsprinzip allgemein gilt. Die nähere Untersuchung darüber ist in einer späteren Arbeit zu geben.

Eben diese Aufgabe des Superpositionsprinzips verursacht, daß, obwohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kräfte eine endliche ist, das Energieerhaltungsprinzip seine klassische Form behält.

Wer will, denke sich als Übermittler der elektromagnetischen Wirkungen einen mechanischen Äther, der nur potentielle Energie besitzt, und dessen gegenseitige Wirkung mit den Elektronen dem dritten Axiom Newtons gehorcht. Es hat dann einen Sinn, nur von der gegenseitigen potentiellen Energie der Ladung und den in nächster Umgebung der Ladung liegenden Ätherteilen zu reden. Ist uns aber der Mechanismus der Wirkungsübertragung verborgen, so können wir nur von der gegenseitigen potentiellen Energie zweier oder mehreren Ladungen sprechen, die jetzt natürlich einen anderen Ausdruck haben wird. Es handelt sich eigentlich nur um Einführung anderer verallgemeinerter Koordinaten; das Energieprinzip bleibt aber unverletzt, und die Summe der inneren Kräfte des Systems bleibt immer Null.

Wir aber, wie schon betont war, nehmen von jeder Äthervorstellung Abstand. Dies bedeutet, wie W. Ritz ganz richtig bemerkt, eine Rückkehr zur Fernwirkung, die nur retardiert ist.

Es wird nicht ohne Interesse sein, zu betrachten, wie sich unsere Anschauungen über scheinbare Ladungen vom Standpunkt der Differentialgleichungen des Feldes aus ausdrücken werden. Als Illustration dafür nehmen wir einen (nicht den allgemeinsten) Fall der abgeänderten Feldgleichungen, die ohne weitere Diskussion in den Handschriften des verstorbenen N. Paschsky sich fanden. Wir sehen dabei von der Frage über die Störungsausbreitung ab[1]) und stellen uns auf den Boden der klassischen Betrachtungsweise.

Die ersten zwei Gleichungen schreiben wir:

$$\mathrm{Curl}H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \xi(\varrho, v) \qquad (\mathrm{I})$$

$$\mathrm{Curl}E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (\mathrm{II})$$

ξ ist eine Funktion von ϱ, v mit den Bedingungen

$$\xi(o, \varrho) = \xi(v, o) = o.$$

Nehmen wir die div von den beiden Teilen von (I), so erhält man, da div Curl $= o$ ist:

$$\mathrm{div}\,E = c\int \mathrm{div}\,\xi\,dt + \mathrm{const.} = \eta(\varrho, v). \qquad (\mathrm{III})$$

Analog aus (II)

$$\mathrm{div}H = \mathrm{const.}$$

machen wir die Hypothese, daß const. $= o$ ist, so folgt

$$\mathrm{div}H = o. \qquad (\mathrm{IV})$$

Setzen wir

$$\eta(\varrho, v) = \varrho',$$

so haben wir

$$\mathrm{div}E = \varrho'. \qquad (\mathrm{III\,a})$$

Es tritt schon hier ganz klar hervor, daß die scheinbare Ladungsdichte ϱ' von der Geschwindigkeit abhängt. Die Gleichungen (I) bis (IV) lassen sich in üblicher Weise durch Gleichungen für retardierte Potentiale ersetzen und so integrieren. Wir erhalten

1) Sie ist von der uns hier interessierenden Frage ganz unabhängig.

$$\Phi = \int_{[r]} \varrho' \, ; \qquad A = \int_{[r]} \xi \, .$$

Die Klammern [ ] haben auch ihre übliche Bedeutung.

Wird jetzt für die Dichte der ponderomotorischen Kraft eine gewisse Funktion Ξ von E, H und v gegeben, so erhält man einen Ausdruck für die elementare Kraft, welcher durch geeignete Wahl von ξ und Ξ mit (1) zur Übereinstimmung gebracht werden kann.

In einer bald in der „Physical Review" erscheinenden Arbeit[1]) habe ich gezeigt, wie man die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen zu verändern hat, um sie mit dem Paschsky-Prinzip in Einklang zu bringen. Dieselben Methoden können wir auch auf die Gleichungen (I) bis (IV) anwenden. Doch tritt hier die Einfachheit des Ritzschen Standpunktes gegenüber der Anwendung des Feldbegriffes noch mehr hervor.

1) N. Raschevsky, On the theory of electromagnetic field. (Eingesandt Mai 1921.)

Konstantinopel, Physikalisches Laboratorium, Robert College, August 1921.

(Eingegangen 10. September 1921.)

Dynamisches Quantengewicht, Molekülsymmetrie und Ferromagnetismus.

Von W. Schottky.

Die folgenden Bemerkungen schließen sich an einen Aufsatz mit ähnlichem Titel an, der Anfang vorigen Jahres in dieser Zeitschrift veröffentlicht wurde. (Dynamisches Quantengewicht, Nernstsches Theorem und Gibbssches Paradoxon, S. 1—11, 1921.) Es handelt sich zunächst um die Berichtigung eines Vorzeichenfehlers, der von anderer Seite im Zusammenhang mit einer für das ganze Problem wichtigen experimentellen Feststellung aufgedeckt wurde; das weitere baut sich auf zwei neueren, für die theoretische Seite des Problems bedeutsamen Arbeiten auf, einer Arbeit von P. Ehrenfest (Fragen der Molekülsymmetrie) und einer Notiz von W. Lenz über die Theorie des Para- und Ferromagnetismus.

Berichtigung[1]).

Bei der Diskussion der beobachteten Abweichungen der chemischen Konstanten von dem nach dem Nernstschen Theorem zu erwartenden allgemeinen Normalwert habe ich mich einer Vorzeichenverwechslung schuldig gemacht. Die chemische Konstante, bezogen auf Atmosphärendruck, Briggsche Logarithmen und die Einheit des Atomgewichtes ist nach der Berechnung von Stern $-1{,}588$; beobachtet sind für Hg: $-1{,}62$, für Ar: $-1{,}65$; für H_2: $-1{,}69$. Die Abweichungen sind also bzw. $-0{,}03$; $-0{,}06$; $-0{,}10$ und nicht, wie in dem Aufsatz angegeben, $+0{,}03$; $+0{,}06$; $+0{,}10$.

Falls das dynamische Quantengewicht bei der ganzen Frage eine Rolle spielt, können, wie bemerkt, nur Abweichungen nach der positiven Seite erwartet werden; also z. B., wenn das Quantengewicht im Gaszustand doppelt so groß ist wie im festen Zustand, der Wert $-1{,}3$ statt $-1{,}6$ usw. Der Fehler ist durch die Herren R. Ladenburg u. K. Minkowski anläßlich einer in Breslau versuchten Bestimmung der chemischen Konstante von Natriumdampf aufgedeckt worden, von der mir Herr R. Ladenburg freundlichst Mitteilung machte, und welche tatsächlich für die „chemische Normalkonstante" des Natriums, in Nernstscher Zählung, einen um einige Dezimalen algebraisch größeren, numerisch kleineren Wert zu ergeben scheint. (Für Kalium gilt das gleiche.) Bei der Wichtigkeit der Frage ist zu wünschen, daß dieses Resultat, das für die Beurteilung des Nernstchen Theorems von entscheidender Bedeutung ist, von den ihm noch anhaftenden Ungenauigkeiten befreit werden möge.

Was ändert sich nun in der Diskussion der bisher beobachteten Abweichungen (die übrigens sämtlich innerhalb der Fehlergrenzen liegen) durch die Umkehr des Vorzeichens?

Die für Ar und Hg gezogenen Schlußfolgerungen werden dadurch nicht berührt; es wurde hier schon darauf hingewiesen, daß die Abweichungen auf alle Fälle so klein sind, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit diesen Substanzen der Normalwert der chemischen Konstante zuzuschreiben ist. Nur für Wasserstoffdampf ändern sich die Überlegungen. Hier ist der experimentelle Wert $-1{,}69 \pm 0{,}15$; das ist nicht eine Abweichung, „die fast ebenso gut das Gewicht 2 wie das Gewicht 1 für den untersten Quantenzustand des Wasserstoffmoleküls zuläßt", sondern ein zusätzliches Gewichtsglied $+\log 2$, das ja für die chemische Konstante den Wert $-1{,}3$ ergeben würde, ist hier ebenfalls mit Sicherheit auszuschließen.

Molekülsymmetrie.

Nach dieser Feststellung würde ich wohl von meiner ursprünglichen Meinung, daß bei

1) Druckfehlerberichtigungen zur Hauptabhandlung: In Gl. (1), S. 2 ist rechts ein — statt des =-Zeichens zu setzen. In Gl. (6), S. 3 rechts ist die Klammer vor $\ln c_{km}$, nicht vor c_{km} zu setzen.

quantenhaften Rotationen und Umläufen jeder der beiden Umlaufsinne mit dem dynamischen Quantengewicht 1 zu bewerten sei, abgekommen sein, wenn nicht gerade in bezug auf symmetrisch gebaute Moleküle meine Überlegungen schon vorher eine Abänderung erfahren hätten, die sich im wesentlichen auf eine Arbeit von P. Ehrenfest[1]) gründet, in der im Anschluß an Boltzmann und Tetrode bei der Berechnung der Größe des für symmetrisch rotierende Gebilde in Betracht kommenden Phasenraums gewisse Symmetriezahlen berücksichtigt werden; eine Arbeit, die etwa 1 Jahr vor der meinigen erschienen ist, die ich jedoch leider erst kürzlich kennen lernte. Es handelt sich dabei in gewissem Sinne um dasselbe, was ich am Anfang meiner in Rede stehenden Abhandlung als „Vertauschungsgewicht" bezeichnete und mit dem „dynamischen Quantengewicht" in Parallele stellte. Richtiger als Parallelstellung wäre jedoch Gegenüberstellung gewesen; denn die Vertauschungsgewichte gehen bei der Berechnung der Phasenwahrscheinlichkeit als echte Brüche, ihre Logarithmen mit negativem Vorzeichen in die Rechnung ein, während das dynamische Quantengewicht ganzzahlig ist und einen positiven Beitrag zur chemischen Konstante liefert.

Die auf derartige Vertauschungsgewichte oder Symmetriezahlen bezüglichen Fragen, in deren Gebiet auch die vielumstrittene Art der Einführung des $n.\ln n$-Gliedes in die statistische Berechnung der Entropie von Gasen gehört, lassen sich, wie Ehrenfest zeigt, durch explizite Berechnung des Gesamtphasenraums des betreffenden Systems klarstellen. Mitunter scheint mir aber eine abgekürzte Betrachtungsweise von Vorteil zu sein, die schon gelegentlich von mir angedeutet worden ist[2]), und die auf folgendem — unschwer zu beweisendem — Satze beruht: „Bei der statistischen Berechnung der Gesamthäufigkeit irgendwelcher Zustände in verschiedenen koexistenten Phasen[3]) sind alle Vertauschungen gleicher Elemente untereinander in den einzelnen Phasen zu unterschlagen, falls, wie üblich, die „Quervertauschungen" durch die verschiedenen Phasen hindurch unterschlagen werden. Sind in der Berechnung des Phasenraums bzw. der Anzahl der „Quantenzellen" in irgendeiner Phase bereits solche Vertauschungen enthalten, so ist nachträglich durch diese Vertauschungszahlen zu dividieren."

Wenn man sich auf diesen Satz stützt, erscheint es unmittelbar einleuchtend, daß die Ehrenfestschen Betrachtungen, die von dem entsprechend der klassischen Theorie und der Ergoden-Hypothese gleichmäßig ausgefüllten Phasenraum des rotierenden Gebildes ausgehen, auch für den ersten Quantenzustand der Rotation Geltung haben müssen; speziell beim Wasserstoffmolekül ist ja nach einer Drehung um 180° ein Zustand erreicht, der ebensogut durch Vertauschung der beiden Wasserstoffatome hätte herbeigeführt werden können. Sollen also, gemäß dem obigen Satze, alle Zustände, die durch Vertauschung auseinander hervorgehen, unterschlagen werden, so ist der zu den Rechts- und Linksumläufen mit der Quantenzahl 1 gehörige Phasenraum[1]) für jedes Molekül nachträglich mit 2 zu dividieren, d. h. es ist ebenso, als ob durch die Symmetrie das „Gewicht" dieses Zustandes halbiert würde.

Ist also der Rechts- und Linksumlauf, jeder für sich, mit dem Gewicht 1 zu versehen, so ist das Gesamtgewicht des untersten Quantenzustandes (— als den wir immer nicht den Ruhezustand, sondern den der Rotation mit der Quantenzahl 1 ansehen —) nicht 2, sondern 1; wäre dagegen nur den beiden Umlaufsrichtungen zusammen das dynamische Quantengewicht 1 zuzuschreiben, so müßte das Gesamtgewicht $^1/_2$ sein, d. h. kleiner als das Quantengewicht (= 1) des Wasserstoffmoleküls im festen Wasserstoff, was wohl nicht wahrscheinlich ist.

Fügt sich also nach dieser revidierten Theorie das Wasserstoffmolekül dem Nernstschen Theorem, so ist dies sicher nicht der Fall für 2-atomige Moleküle, die aus verschiedenen Atomen bestehen, z. B. *HCl*, *CO*. Für den untersten Quantenzustand dieser Gebilde wäre eine chemische Normalkonstante mit dem Wert $-1{,}6 + \log 2 = -1{,}3$

1) Deduction of the dissociation-equilibrium from the theory of quanta and a calculation of the chemical constant based of this. Amsterd. Akademieberichte 13, 162—183, 1920.

2) Diese Zeitschr. 1921, S. 1: „Wird definitionsgemäß die Vertauschbarkeit gleicher Elemente in der Berechnung des Gewichts unterschlagen . . ."

3) Statt „Phasen" können hier auch Partialbestandteile einer idealen Gasmischung betrachtet werden.

1) Man erinnert sich, daß zu jedem möglichen Quantenzustand eine Phasenzelle gehört. Da diese Phasenzellen wenigstens unter den einfachsten Annahmen der 1. Quantenhypothese untereinander gleich sind, so ist die Zahl der möglichen Quantenzustände gleicher Energie, d. h. das „Gewicht" gleich dem zu den betreffenden Quantenzuständen gehörigen Gesamtvolumen ihrer Phasenzellen, dividiert durch das Volumen einer einzigen Phasenzelle.

zu erwarten. Leider ist bekanntlich hier eine experimentelle Bestimmung dieser Konstanten bisher unmöglich gewesen, da es nicht gelungen ist, die spezifische Wärme dieser Gase bis zu genügend tiefen Temperaturen zu verfolgen. Dagegen ist von Herrn A. Langen auf Anregung von Herrn Nernst der Versuch gemacht worden[1]), aus der zu rund —1,6 angenommenen chemischen Normalkonstante derartiger Gase und einer Annäherungsformel für die spezifischen Wärmen die Trägheitsmomente ihrer Moleküle zu berechnen. Wenn nun die chemische Normalkonstante in Wirklichkeit —1,3 ist, so findet man, daß diese Berechnungen mit erheblichen Fehlern behaftet sein müssen, und zwar desto mehr, je weniger die Beobachtungstemperatur die charakteristische Temperatur überschreitet. Aber auch, wenn die Annahme des „doppelten Umlaufgewichtes" nicht stimmen sollte, und nur als erwiesen angenommen würde, daß der unterste Quantenzustand bereits ein Rotationszustand ist, so müßte die Langensche Berechnung angefochten werden, und zwar auf Grund der skizzierten Symmetriebetrachtung. Es werden nämlich H_2, O_2, N_2 mit derselben chemischen Konstante berechnet wie CO, NO; auf Grund der verschiedenen Symmetrieverhältnisse müßten sich diese Konstanten, gleichviel welchen Wert sie haben, auf alle Fälle um log 2 unterscheiden.

Schwieriger ist es zurzeit, für mehratomige Gebilde mit irgendwelchen räumlichen Symmetrieverhältnissen (z. B. NH_4) die für den ersten Quantenzustand in Frage kommenden Symmetriezahlen anzugeben. Sicher sind diese Zahlen nicht mit den von Ehrenfest diskutierten Symmetriezahlen identisch, da bei der Ehrenfestschen Berechnung Drehungen um verschiedene räumliche Achsen in Frage kommen, während für die Rotation im ersten Quantenzustand wohl bloß Symmetrien in bezug auf die Rotationsachse gezählt werden dürfen. Man sieht, daß dieses Problem nicht ohne eine befriedigende Theorie der Quantelung von Rotationsbewegungen mehratomiger Moleküle zu lösen sein wird.

Auch zu der Frage des Quantengewichtes der Atome im untersten Quantenzustand sind noch einige Bemerkungen zu machen, die freilich mit den bisherigen Betrachtungen nicht in direktem Zusammenhang stehen. Wenn bei den Bewegungen der Elektronen um den Kern ähnliche Symmetrien um die Rotationsachse aufträten, wie bei starren Gebilden — ich denke etwa an mehrere symmetrisch auf einem Ring angeordnete und gleichsinnig umlaufende Elektronen, — so wären zwar sicher auch hier die Quantengewichte durch gewisse Symmetriezahlen zu dividieren[1]), doch scheint ja dieser Typus von Bewegungen in Wirklichkeit überhaupt nicht vorzukommen. Und auch die in der Hauptabhandlung (S. 10, oben links) diskutierte Umlaufsymmetrie von Atomen mit geraden Elektronenzahlen — dadurch definiert, daß bei der Umkehr aller Bewegungsrichtungen ein völlig gleichartiges (also nicht erst etwa durch Drehung einer Vorzugsachse in das ursprüngliche überzuführendes) Gebilde entsteht — scheint bei Atommodellen mit räumlichen Elektronenbahnen nicht vorhanden zu sein. (Ein Elektronentetraeder mit merklicher Erhaltung der Umlaufsebenen der einzelnen Elektronen würde z. B. bei Umkehr aller Bewegungen in ein neues System übergehen, das nur durch zusätzliche Drehung in das alte übergeführt werden könnte.) Es scheint also, als ob das empirische Quantengewicht 1 für Argon und Quecksilber — wozu neuerdings auch Zn und Cd[2]) mit ebenfalls geraden Elektronenzahlen hinzukommen — nicht durch Symmetrieeigenschaften der betreffenden Atome erklärt werden könnte.

Para- und Ferromagnetismus.

Ich möchte deshalb auf eine andere Möglichkeit hinweisen, das Fehlen des log 2 Gliedes in der chemischen Konstante dieser Substanzen zu erklären und gleichzeitig einen Unterschied gegenüber der Na- (und K-) Konstante — wenn sich das log 2 Glied hier wirklich bestätigen sollte — denkbar zu machen. Es handelt sich dabei um die Eventualität, daß der Unterschied der chemischen Konstante nicht auf Gewichtsunterschieden der ersten Quantenzustände im Dampfraum, sondern auf Gewichtsunterschieden im festen Körper beruht, und zwar denke ich besonders an die Möglichkeit, daß durch Umkehr aller Bewegungsrichtungen in einem Atom bei unverändertem Umlaufssinn der Nachbaratome ein neuer Quantenzustand entsteht, der sich energetisch von dem ursprünglichen wenig unterscheidet. Mit anderen Worten, ich möchte jetzt die früher (a. a. O.

1) Zeitschr. f. Elektrochemie. **25**, 25. 1919.

1) Ein wesentlicher Unterschied gegenüber den starren Molekülen würde allerdings darin bestehen, daß diese Symmetriezahlen sich nur im Dissoziationsgleichgewicht im Dampfraum, nicht in bezug auf den Dampfdruck über einem Bodenkörper bemerkbar machen würden. Denn im Gegensatz zu den starren Molekülen müßten wir die betreffenden symmetrischen Elektronen des Atoms auch im festen Körper als umlaufend annehmen, und es würde dann das Gewicht auch im festen Körper durch dieselben Symmetriezahlen dividiert werden müssen.

2) Heidhausen, Diss. Breslau 1920.

S. 8) zunächst als zu fremdartig beiseite geschobene Annahme diskutieren, daß tatsächlich nicht erst bei höheren Temperaturen, sondern bereits bei meßbaren oder sogar unmeßbar tiefen Temperaturen in bezug auf den Umlaufssinn der Atome in den festen Körpern, eine völlige Desorientierung einsetzt, die in gewissen Fällen einen praktischen Widerspruch mit dem Nernstschen Theorem oder wenigstens mit der bisherigen Art seiner Anwendung bedeuten kann.

Ich würde für diese Vermutung keine Glaubwürdigkeit beanspruchen, wenn sie bloß als ein möglicher Ausweg in den erwähnten Quantengewichtsschwierigkeiten eingeführt werden sollte. Es existieren jedoch für sie noch andere, und wie es scheint, sehr gewichtige experimentelle Begründungen. Und zwar sind es zwei Tatsachen aus dem Gebiet des Para- und Ferromagnetismus, die hier entscheidend ins Gewicht fallen. Die eine ist das bei gewissen paramagnetischen Salzen beobachtete Fortbestehen des Paramagnetismus und seiner normalen Temperaturabhängigkeit bis zu den tiefsten noch meßbaren Temperaturen hinab. Diese Erscheinung ist von W. Lenz, wie uns scheint, mit großem Glück durch die Existenz energetisch nahezu gleichberechtigter Lagen der magnetischen Atomachsen im festen Körper gedeutet worden. Hier wäre also wirklich einmal die Existenz verschiedener, nahezu gleichwertiger Quantenzustände, die sich durch den Umlaufssinn unterscheiden[1]), im festen Zustande zum mindesten höchst wahrscheinlich gemacht („zu kleine Θ", a. a. O., S. 8). Aber auch der Fall, daß eine quantenhafte Änderung der Bahnebenen innerhalb eines Atoms (insbesondere die Umkehr der Umlaufsrichtungen) bei ungeändertem Zustand der Nachbaratome, einen Energieaufwand von mittlerer Größe bedeutet („gut meßbare Θ"), scheint in der Natur vorzukommen, und zwar bei den im gewöhnlichen Temperaturgebiet ferromagnetischen Körpern, die, bekanntlich bei höheren, aber gut meßbaren Temperaturen einen Umwandlungspunkt zeigen, der außer durch eine fundamentale Änderung der magnetischen Eigenschaften auch durch einen nicht unbeträchtlichen kalorischen Effekt gekennzeichnet ist.

Um die allgemeine quantenstatistische Bedeutung, die wir dem ferromagnetischen Umwandlungspunkt hier zuschreiben, etwas näher zu erläutern und zu rechtfertigen, weisen wir zunächst darauf hin, daß hier zweierlei zusammen kommt: ein experimenteller Effekt (quantenhafte Desorientierung innerhalb des Atominnern bei gut meßbaren Temperaturen), der von uns gesucht wurde und andererseits vielleicht eine atomistisch quantentheoretische Deutung der den Ferromagnetismus und seine Temperaturabhängigkeit verursachenden Kräfte. Denn es ist schon von P. Weiss und kürzlich von O. E. Frivold[1]) überzeugend nachgewiesen worden, daß die magnetischen Kräfte zwischen den einzelnen Atomen, z. B. des Eisens, bei weitem nicht ausreichen, um die so außerordentlich weitgehende Ordnung der magnetischen Atomachsen innerhalb der ferromagnetischen Körper zu erklären. Frivold führt statt dessen, mehr phänomenologisch als modellmäßig, die Annahme einer mit der magnetischen parallel gehenden elektrischen Polarität ein, und W. Lenz spricht allgemein von verschiedenen (nichtmagnetischen) potentiellen Energien in der Null- und π-Lage. Offenbar liegt es nahe, die Erklärung des verhältnismäßig großen Energieunterschiedes beim „Umklappen" zunächst einmal in der modellmäßig vorhandenen Verschiedenheit der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen zwei benachbarten Atomen mit gleichsinnig bzw. ungleichsinnig umlaufenden Atomen zu suchen und damit auf den von uns vermuteten allgemeinen Effekt zurückzuführen.

Dem Einwand, daß der von uns gesuchte Effekt unter diesen Umständen, wenigstens in seinen kalorischen Auswirkungen, doch viel allgemeiner, und nicht nur bei magnetischen Substanzen, im normalen Temperaturgebiet auftreten müsse, läßt sich vielleicht durch den Hinweis begegnen, daß, vom modellmäßigen Standpunkt, den Atomen mit resultierendem magnetischem Moment, wohl auch ein besonders großer elektrostatischer Einfluß des Umlaufssinnes zuzuschreiben ist. Denn ist, wie bei den meisten Atomen, das resultierende magnetische Moment gleich Null, so bedeutet das immerhin, daß in gewissen Nachbarebenen (z. B. beim Tetraeder) oder in derselben Umlaufsebene Elektronen mit anderartigen Umläufen vorhanden sind, so daß auch die elektrostatische Wirkung der verschiedenen

1) Damit diese beiden Vorgänge — Umkehr der Umlaufssinne und Umklappen der Atomachsen — dasselbe Resultat ergeben, sind noch gewisse Symmetrieannahmen über die Elektronenbahnen erforderlich. Es wäre jedoch zurzeit wohl verfrüht, auf diese Frage näher einzugehen.

1) Ann. d. Phys. **65**, 1—35, 1921. Der Nachweis gründet sich auf die Annahme vollständiger Drehbarkeit der Atomachsen; die Hinzufügung diskreter Lagen ändert jedoch nicht das Größenordnungsmäßige dieser Betrachtungen.

Elektronen in solchen Fällen viel eher durch einen Bahnmittelwert wird dargestellt werden können, als bei Atomen, in denen eine derartige Kompensation nicht vorhanden ist[1]).

Natürlich hat auch die elektrostatische Wechselwirkung zwischen einem magnetischen Atom und einem derartigen „kompensierten" Atom einen viel kleineren Richtungseffekt, als die zwischen zwei „unkompensierten" Atomen, und es liegt nahe, den erstaunlich raschen Übergang vom Ferromagnetismus zum Paramagnetismus, der durch Beimischung derartiger neutraler Atome eintritt, auf Rechnung dieses Umstandes zu setzen. Von noch kleinerer Größenordnung wird wahrscheinlich der Richtungseffekt zwischen zwei kompensierten Atomen sein. Natürlich ist auch ein außerordentlich großer Einfluß der Periode zu erwarten: zwei Atome mit gleicher Umlaufsperiode werden einen Richtungseffekt von ganz anderer Größenordnung aufeinander ausüben, als solche von ungleicher Umlaufsperiode.

Fassen wir das Resultat dieser nur andeutenden Bemerkungen zusammen, so können wir vermuten, den energetischen Effekt einer Umkehr des Umlaufssinnes in gewissen Fällen gefunden und zugleich nachgewiesen zu haben, daß die Fälle, wo diese energetischen Wirkungen „gut meßbaren Θ" entsprechen, zu denjenigen gehören, in denen der Effekt seinen größtmöglichen und nicht etwa den kleinstmöglichen Wert zeigt. Im allgemeinen werden wir also den Übergang von der völligen gegenseitigen Orientierung der Quantenbahnen in benachbarten Atomen zu einer teilweisen Desorientierung bei tiefen, teilweise sogar bei sehr tiefen Temperaturen zu suchen haben[2]), und es wäre unter diesem Gesichtspunkt auf Anomalien der spezifischen Wärmen bzw. auf gewisse durch Strukturänderungen nicht erklärbare (thermische und mechanische) Umwandlungspunkte fester Körper bei tiefen Temperaturen zu achten.

Liegt aber — und wir kommen damit wieder auf die vorhin abgebrochenen Betrachtungen über die chemische Konstante zurück — bei gewissen Substanzen die charakteristische Temperatur insbesondere für die Umkehr aller Umlaufsrichtungen im Atom so tief, daß bei den tiefsten noch meßbaren Temperaturen bereits in bezug auf den Umlaufssinn völlige Desorientierung eingetreten ist, so wird für jede Untersuchung der betreffende Körper sich so verhalten, als ob er, von $T = 0$ an, das dynamische Quantengewicht 2 pro Atom besäße. Nähmen wir an, daß dies für *Ar*, *Hg*, *Zn*, *Cd* der Fall ist, so hätten wir hier das Fehlen des log 2-Gliedes darauf zurückgeführt, daß s o w o h l im Dampf wie im festen Körper das Gewicht 2 anzunehmen ist. Um das Auftreten des log 2-Gliedes bei *Na* und *K* zu erklären, würde dagegen hier bei den tiefsten Temperaturen, bis zu denen die spezifischen Wärmen verfolgt sind, mit einer völligen Orientierung der Elektronenumlaufssinne im festen Zustand zu rechnen sein[1]). Ob dies modellmäßig zu erklären ist, lasse ich dahingestellt; zunächst wird ja auch erst einmal die Nachprüfung der experimentellen Daten des *Na*-Systems abzuwarten sein.

Überblicken wir zum Schluß noch einmal den augenblicklichen Stand der Dinge, so werden wir zugeben müssen, daß an Stelle unseres Ausgangspunktes, des N e r n s t schen Theorems, noch keine neuen Aussagen von ähnlicher Einfachheit und Bestimmtheit getreten sind; doch scheint die quantenstatistische Betrachtungsweise dafür eine Mannigfaltigkeit von theoretischen und experimentellen Problemen und Beziehungen hervortreten zu lassen, zu denen vom rein phänomenologischen Standpunkt des N e r n s t schen Theorems keine Brücke geführt hätte.

1) Sind die Richtkräfte auf die elektrostatische Wirkung der „magnetischen Elektronen" zurückzuführen, so wird man wohl im allgemeinen auch zu erwarten haben, daß eine Drehung der magnetischen Achse um 90° (bei einheitlicher Orientierung aller Nachbarachsen) einen viel größeren Energieaufwand bedeutet, als eine Drehung um 180°. Man wird also bei einer Quantentheorie des Ferro- und Paramagnetismus sich vielleicht zunächst auf die Betrachtung der o- und π-Lage beschränken können und die Energie der Zwischenlagen nur bei der Frage zu berücksichtigen haben, ob und mit welcher Geschwindigkeit sich das statistische Gleichgewicht e i n s t e l l t. Die quantentheoretische Durchrechnung der ferromagnetischen Probleme erhoffe ich von einer nicht zu fernen Zukunft; soweit ich sehe — ich weiß nicht, ob das schon ausgesprochen worden ist — würde jedenfalls u. a. die Beseitigung gewisser Unstimmigkeiten der W e i ß schen Kurve der spontanen Magnetisierung durch die Einführung quantentheoretischer Annahmen gelingen müssen.

2) Es ist hierbei auch die Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß gewisse abgespaltene Teile des Atoms, etwa z w i s c h e n den Atomkernen im Gitter umlaufende Elektronen, ihre Ordnung bis zu verhältnismäßig hohen Temperaturen beibehalten, während die Restatome, die vielleicht in unserem Sinne „kompensierte" Systeme darstellen, bereits bei sehr tiefen Temperaturen eine Umlaufsdesorientierung zeigen. In diesem Falle wäre genau wie bei einem Umklappen des ganzen Atoms das Quantengewicht 2 pro Atom einzusetzen.

1) Das kalorische Analogon des ferromagnetischen Umwandlungspunktes müßte also bei diesen Substanzen in das Gebiet „normaler" oder „hoher" Temperaturen gerückt sein; vielleicht ist dieser Desorientierungsvorgang auch ein Teil des Schmelzprozesses.

S c h l o ß S c h a u m b u r g a. d. L a h n, den 18. Oktober 1921.

(Eingegangen 3. November 1921.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN DES DEUTSCHEN PHYSIKERTAGES IN JENA VOM 18.—24. SEPTEMBER 1921.

H. C. Burger (Eindhoven), Struktur des Wolframs.

Der Gegenstand meiner Untersuchungen ist die Struktur des gezogenen Wolframdrahtes. Meine Methode und Resultate sind analog denen, welche Herr Weißenberg schon mitgeteilt hat. Ein Wolframdraht ist bestrahlt worden mit homogenen Röntgenstrahlen, die senkrecht auf dem Draht stehen. Die reflektierten Strahlen werden aufgefangen auf einer senkrecht auf den Strahlen sich befindenden photographische Platte. Die Intensität in den Ringen reflektierten Lichtes, die sich auf der Platte abbilden, zeigen, daß die Kristalle im Drahte mit den Rhombendodekaederflächen senkrecht auf der Drahtachse stehen.

Zu diesem Resultate möchte ich noch einige Bemerkungen hinzufügen:

Beim Ziehen wird das Material des Drahtes sehr stark beansprucht und man könnte daher erwarten, daß das Raumgitter sich dabei änderte. Auch die oft beobachtete Zunahme der Dichte beim Ziehen würde das vermuten lassen. Das Raumgitter bleibt aber auch quantitativ ungeändert. Die Durchmesser der Ringe der reflektierten Strahlen sind genau dieselben wie bei Wolframpulver verschiedener Herkunft. Auch die Breite der Ringe ist bei gezogenen Drähten nicht meßbar größer als bei Pulver. Die elementaren Kristalle im Draht bestehen also noch aus einer größeren Menge von Atomen, die in den normalen Entfernungen voneinander liegen.

Die Ringe bestehen beim gezogenen Draht nicht aus einzelnen Punkten, sondern die Intensitätsmaxima sind ziemlich flach. Das bedeutet, daß nicht alle Kristalle mit den Rhombendodekaederflächen genau senkrecht zur Drahtachse sind, sondern daß auch andere Richtungen vorkommen. Es wäre interessant, aus der Intensität der Ringe als Funktion des Ortes ein Frequenzgesetz für die Häufigkeit der verschiedenen Orientierungen der Kristalle abzuleiten. Dabei muß man auf die Absorption achten. Die in verschiedene Richtungen reflektierten Strahlen durchlaufen nämlich verschieden lange Wege durch den Draht und werden daher in verschiedenem Maße durch Absorption geschwächt.

Daß die Absorption nicht die ganze Intensitätsverteilung der Ringe verursacht, stellt sich heraus, wenn man die Beobachtungen statt mit homogenem, mit heterogenem Lichte macht. Man bekommt dann eine kontinuierliche Schwärzung, die aber nicht radialsymmetrisch ist, sondern in gewissen Richtungen Maxima zeigt. Die hierbei verwendeten Strahlen sind so hart, daß sie durch die dünnen Drähte von 10 μ größtenteils durchgelassen werden. Die Intensitätsverteilung im sternförmigen Bilde ist in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Orientierung der Kristalle, wobei die Rhombendodekaederflächen senkrecht zur Drahtachse sind, bevorzugt ist.

Glüht man den Draht bei hoher Temperatur und durchleuchtet ihn dann mit heterogenem Röntgenlicht, so ist die kontinuierliche Schwärzung zerfallen in viele kleine schwarze Flecke. Diese rühren von größeren Kristallen her, die durch Kristallisation entstanden sind. In der Verteilung dieser Flecken kann man noch etwas bemerken von den Intensitätsmaxima, die im Bilde des ungeglühten Drahtes vorkommen. Die Orientierung bleibt also wenigstens teilweise, auch nach starkem Glühen, bestehen.

Die verwendete Röntgenröhre war eine gasgefüllte Glasröhre mit einer Antikathode aus Kupfer und einer Kathode aus Aluminium. Die Kathode ist durchbohrt und die Kupferstrahlen können durch das Loch austreten. Als Fenster ist dünnes Nickelblech verwendet. Nickel hat den Vorzug, daß sein Absorptionsindex für die α-Linie relativ klein ist und für die β-Linie groß. Die α-Linie liegt in der Nähe des Absorptionsminimums von Nickel. Dieser Stoff ist also sehr geeignet, um als Filter zu dienen, das aus einem Spektrum nur die α-Strahlung des Kupfers durchläßt.

(Eingegangen 15. November 1921.)

L. Schiller (Leipzig), Experimentelle Feststellungen zum Turbulenzproblem[1]).

Seit den grundlegenden Untersuchungen von O. Reynolds bis heute hat das Turbulenz-

1) Wegen näherer Angaben und Literaturhinweise vergleiche man die folgenden Veröffentlichungen des Verfassers:

L. Schiller, Rauhigkeit und kritische Zahl. Zeitschr. f. Phys. 3, 412, 1920.

— Untersuchungen über laminare und turbulente

problem stets ein ebenso reizvolles wie schwieriges Gebiet der theoretischen Forschung gebildet. Zur richtigen Würdigung der stark auseinandergehenden theoretischen Ergebnisse ist es wichtig, die experimentellen Tatsachen völlig festzulegen, zumal auch hierüber in der Literatur sich recht widerspruchsvolle Angaben finden. Die Aufgabe des Experiments ist im wesentlichen die Bestimmung der „kritischen Zahl" R_k, jener von Reynolds angegebenen dimensionslosen Kombination aus mittlerer Geschwindigkeit u, charakteristischer Länge (Rohrhalbmesser) a und kinematischer Zähigkeit $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ (μ = Zähigkeit, ϱ = Dichte), bei deren Überschreitung der Übergang von laminarer in turbulente Strömung eintritt:

$$R_k = \frac{\bar{u} \cdot a}{\nu}.$$

Die Angaben über den Wert dieser kritischen Zahl erstrecken sich mit mehr oder weniger großen Lücken von $R_k = 200$ (Ruckes) bis $R = 25500$ (Ekman). Dieser große Bereich der experimentellen Werte zusammen mit der Tatsache, daß die theoretischen Resultate sich über einen noch größeren erstrecken [$R_k = 11$ (Hopf) bis $R_k = \infty$] läßt die Frage aufkommen, ob nicht vielleicht je nach den veränderten Bedingungen alle Werte der kritischen Zahl möglich sind und keiner unter ihnen eine besondere Bedeutung zukommt. Wir werden sehen, daß dem nicht so ist und daß es tatsächlich eine bestimmte kritische Zahl gibt.

Unter welchen Voraussetzungen werden wir bei verschiedenen Versuchsbedingungen erwarten können, denselben Wert für die kritische Zahl zu finden? M. a. W.: Wann garantiert die Konstanz der Reynoldsschen Zahl auch wirklich mechanisch ähnliche Bewegung? In der Definition der Reynoldsschen Zahl ist nur ein Längenparameter enthalten. Das bedeutet die Notwendigkeit völliger geometrischer Ähnlichkeit der Versuchsanordnungen. In Betracht kommt hier vor allem Gestaltung des Mundstücks, durch das die Strömung in das Rohr eintritt, Beschaffenheit (Rauhigkeit) der Rohrwandung und Abstand der untersuchten Stelle der Strömung vom Einlauf.

Allen diesen Bedingungen der geometrischen Ähnlichkeit kann man in den Versuchsanordnungen mehr oder weniger genau genügen. Auch kann man annehmen, daß bei genügendem Abstand der Meßstelle vom Einlauf der Einfluß dieser „Anlauflänge" zurücktritt. Zur Herstellung der mechanischen Ähnlichkeit ist aber auch noch eine Bedingung für die Geschwindigkeit zu erfüllen. Nach Reynolds muß sie im umgekehrten Verhältnis zu den Längenabmessungen stehen. Dies läßt sich bei verschieden weiten Rohren innerhalb des Rohres leicht erreichen. Hat man aber zwei Rohre mit einem Verhältnis der Durchmesser 1:2, so verhalten sich bei gegebener Reynoldsscher Zahl die Geschwindigkeiten im Rohr wie 2:1 und die Durchflußmengen wie 1:2. Die Durchflußmengen bestimmen aber im wesentlichen die Zuströmungsgeschwindigkeiten im Trog. Fassen wir Trog und Rohr zusammen als ein Ganzes, so haben wir bei gegebener Reynoldsscher Zahl für den Fall des weiteren Rohres im Rohr die halbe, in der Zuströmung die doppelte Geschwindigkeit gegenüber dem Fall des engeren Rohres, also eine Verletzung der mechanischen Ähnlichkeit. Diese ist insofern von Wichtigkeit, als wir — bei genügender Beruhigung des Vorratswassers — gerade am Einlauf die Stellen der Störung zu suchen haben, die für die kritische Zahl bestimmend sind. Bei gleicher Reynoldsscher Zahl werden also beim weiteren Rohr stärkere Störungen in der Einlaufgegend anzunehmen sein.

Daß die kritische Zahl von dem Betrag der Störungen abhängt, die die Flüssigkeit infolge von Unruhe im Trog oder von Wirbelbildung an dem hierzu besonders geeigneten Einlauf in das Rohr mitbringt, widerspricht in keiner Weise dem Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz, da jede Verschiedenheit der Störung das Strömungsbild verändert. In welcher Weise aber die kritische Zahl von Art und Grad der Störung abhängt, darüber sagt das Ähnlichkeitsgesetz nichts aus. Da die Versuchsergebnisse tatsächlich zu den verschiedensten kritischen Zahlen führen, so ist ein bestimmter Wert der kritischen Zahl nur als unterer Grenzwert für sehr große oder als oberer für sehr kleine Störungen denkbar. Ob ein solcher existiert und wo er liegt, ergibt sich somit als experimentelle Fragestellung.

Auf der Suche nach einer unteren kritischen Zahl wird man bestrebt sein müssen, die Versuchsflüssigkeit vor oder beim Eintritt in

---

Strömung. Erscheint in den „Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens".

L. Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechan. 1, 436, 1921.

— Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen. Erscheint ebenda.

— u. H. Kirsten, Über den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken. Diese Zeitschr. **22**, 523, 1921.

siehe auch: F. Noether, Das Turbulenzproblem. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1, 125 u. 218, 1921.

das Rohr starken Störungen zu unterwerfen, beim Suchen nach einer oberen kritischen Zahl wird man umgekehrt danach trachten, absolute Ruhe im Vorratstrog herzustellen und die Einlauföffnung so zu gestalten, daß die Gefahr einer Ablösung der Strömung und damit Wirbelbildung möglichst herabgesetzt wird.

Nach diesen beiden Richtungen hin weisen bereits die beiden klassischen Versuchsanordnungen von Reynolds. Reynolds entnahm nämlich einmal sein Versuchswasser unmittelbar der Wasserleitung, aus der es natürlich mit starken Störungen behaftet in das Versuchsrohr eintrat. So erhielt er als kritische Zahl den Wert 1200. Hier ist zu bemerken, daß in der Literatur gewöhnlich als von Reynolds gefunden die Zahl 1000 angegeben wird, die tatsächlich einer Umrechnung des von Reynolds selbst im Text angegebenen anders definierten Zahlwertes auf die obige Definition von R entspricht. Eine genauere Diskussion der Reynoldsschen Resultate, die man hierzu am besten in geeigneter Weise graphisch sichtbar macht, führt jedoch zu dem höheren Wert 1200. Wir werden darauf später noch zurückkommen.

Im andern Fall benützte Reynolds sorgfältig beruhigtes Vorratswasser und Einströmung in das Meßrohr durch ein geeignet abgerundetes Einlaufstück. Hiermit erhielt er als kritische Zahl 6400. Dieser Wert stellt jedoch keineswegs eine obere Grenze der kritischen Zahlen dar. Vielmehr führten spätere Versuche von anderen Seiten zu noch wesentlich höheren kritischen Zahlen, am höchsten die von Ekman, bis 25 500. Wenn auch derartig hohe kritische Zahlen nur mit sehr großen Vorsichtsmaßregeln zu erreichen waren, so wird man doch nicht glauben dürfen, hiermit wirklich eine obere Grenze der kritischen Zahlen erreicht zu haben. Vielmehr legen diese hohen kritischen Zahlen und vor allem die beträchtliche Erhöhung bei den Ekmanschen Versuchen gegenüber den früheren die Vermutung recht nahe, daß bei immer weiter gehender Vermeidung von Störungen man auch zu immer höheren kritischen Zahlen kommen würde.

Ganz anders liegen die Verhältnisse betreffs der Existenz einer unteren Grenze der kritischen Zahlen. Die überwiegende Mehrzahl aller einschlägigen Versuche, die unter ähnlichen Bedingungen wie die erstgenannten Reynoldsschen, d. h. ohne weitere Vorsichtsmaßregeln, ausgeführt wurden, lieferte kritische Zahlen, die sich nicht allzusehr von der Reynoldsschen Zahl 1200 unterscheiden. Allerdings existieren auch solche, die wesentlich geringere Werte angeben. Von diesen wurde in der theoretischen Literatur mehrfach Bezug genommen auf eine Arbeit von Rukkes, der für Metallkapillaren kritische Zahlen bis zu 200 herab erhielt. Diese auffallend niedrigen Werte wurden mit einer größeren relativen Rauhigkeit der Metallwandung in Zusammenhang gebracht. Diesen Zusammenhang möchten wir bestreiten, vielmehr die angegebenen niedrigen Werte (in Übereinstimmung mit einer von Herrn Gümbel[1]) gegebenen Beurteilung) als durch die Versuchsanordnung vorgetäuscht auffassen. Die Druckangabe des Manometers integriert nämlich dort über den Widerstand der Rohrströmung, den Eintrittsverlust usw. und enthält so insbesondere auch alle Wirbelwiderstände, die durch Ablösung an irgendwelchen Stellen entstehen. Die als kritische Zahl gedeutete beginnende Abweichung vom linearen Widerstandsgesetz bedeutet also wohl lediglich, daß irgendwo Wirbelablösung stattfindet.

Um zu einwandfreien kritischen Zahlen zu kommen, hat man Druckmessungen zwischen zwei Meßstellen am Rohr auszuführen, die so weit von den Einlaufstörungen entfernt liegen, daß solche nur in geringem Maß in die Meßstrecke gelangen können. Dazu muß erfahrungsgemäß der Abstand der ersten Meßstelle vom Einlauf etwa 100 Durchmesser betragen. Diese Anlauflänge reicht auch — wenigstens für nicht allzu hohe Reynoldssche Zahlen — aus, um die völlige Entwicklung der Turbulenz zu gewährleisten. Man erhält dann für niedrige Reynoldssche Zahlen (bei vorgegebenem Rohr für niedrige Geschwindigkeiten) das Poiseuillesche Widerstandsgesetz und bei der kritischen Zahl eine starke Widerstandserhöhung, die sich durch einen plötzlichen kräftigen Anstieg im Manometer geltend macht. Oberhalb der kritischen Zahl gehorcht alsdann der Widerstand dem von Blasius aufgestellten Widerstandsgesetz. Ist die „Anlauflänge" nicht ausreichend, so werden schon unterhalb der kritischen Zahl Einlaufstörungen noch bis in die Meßstrecke gelangen und den Widerstand gegenüber dem Poiseuilleschen erhöhen, andrerseits wird bei der kritischen Zahl und in einem gewissen Bereich darüber die Turbulenz in der Meßstrecke noch nicht völlig ausgebildet sein. Beides zusammen bewirkt einen nicht so scharfen, mehr allmählichen Übergang zwischen den beiden Widerstandsgesetzen.

Zur Darstellung der Gesetze und der Versuchsresultate in dimensionslosen Koordinaten

---

[1]) L. Gümbel, Das Problem des Oberflächenwiderstandes. Jahrb. d. schiffbautechn. Gesellsch. 1913, S. 455.

gehen wir nach dem Vorgang von Blasius aus von dem in der Hydraulik üblichen Ansatz:

$$\Delta p = \lambda \gamma \frac{l}{a} \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

(Δp = Druckdifferenz, λ = Widerstandskoeffizient; γ = spez. Gewicht, l = Meßlänge, a = Halbmesser, g = Schwerebeschleunigung.)

Benützen wir den hierdurch definierten Widerstandskoeffizienten λ, so nimmt das Poiseuillesche Gesetz der Laminarströmung die Form an:

$$\lambda_{lam} = \frac{16}{R},$$

das Blasiussche Gesetz der turbulenten Strömung die Form:

$$\lambda_{turb} = \frac{0{,}1582}{\sqrt[4]{2R}}.$$

Unter Verwendung der logarithmisch aufgetragenen dimensionslosen Koordinaten λ und R stellt sich das Poiseuillesche Gesetz dar als eine unter 1:1, das Blasiussche als eine unter 1:4 fallende Gerade (vgl. Fig. 1—3). Die Darstellung der Versuchswerte in dieser Weise ist für die scharfe Erfassung der kritischen Zahl besonders geeignet.

Versuche, die ich vor einiger Zeit auf Anregung von Herrn Prof. Prandtl im Göttinger Institut für angewandte Mechanik ausführen konnte, zeigen zunächst den Einfluß der Anlauflänge. Während bei einem Rohr von 8 mm l.W. und einer Anlauflänge von 104 cm die gemessenen Werte bis zum kritischen Punkt mit der Poiseuilleschen Geraden zusammenfielen (Fig. 1, Meßstr. 3[1]), erfolgte bei einem 16 mm weiten Rohr und der gleichen absoluten, also der halben relativen Anlauflänge schon von $R = 800$ ab eine deutliche Abweichung von der Poiseuilleschen Geraden (Fig. 2). (Ein ganz ähnliches Bild bietet eine entsprechende Auftragung der Reynoldsschen Versuche. Dabei hat Reynolds als kritische Zahl diejenige genommen, bei der im Manometer stärkere Schwankungen auftraten, was sich hier durch die beginnende Abweichung von der Poiseuille-Geraden geltend macht. Der wirkliche kritische Wert liegt jedoch höher. So erklärt sich die oben erwähnte Differenz.)

Um eine definierte Einlaufstörung zu haben, waren bei diesen Versuchen die Rohre so in die Trogwand eingesetzt, daß sie glatt mit dieser abschnitten, bei der Umströmung des scharfen Randes also Ablösung und kräftige Wirbelbildung zu erwarten war. Die erhaltenen kritischen Zahlen 1300—1700 lagen noch höher als der Reynoldssche Wert, die vorhandenen Störungen reichten also jedenfalls zur Erreichung einer unteren Grenze der kritischen Zahlen nicht aus. Die Differenz der kritischen

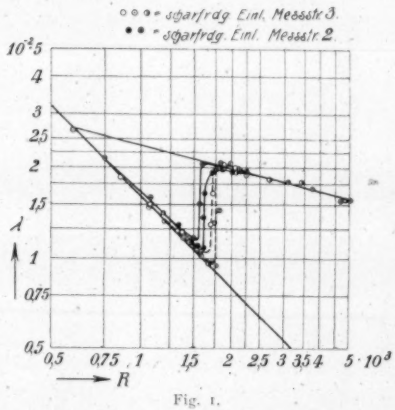


Fig. 1.

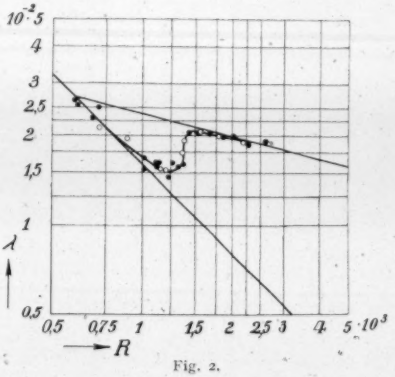


Fig. 2.

Zahlen 1300 gegen 1600—1700 zwischen weitem und engem Rohr erklärt sich aus der eingangs gekennzeichneten Verletzung des Ähnlichkeitsgesetzes.

Weitere Versuche wurden angestellt, um zu untersuchen, in welcher Weise eine stufenweise vor sich gehende Veränderung der Einlaufstörung auf die kritische Zahl wirkt, ob es insbesondere so möglich sein würde, die Lücke zwi-

1) Meßstr. 2 hatte die halbe Anlauflänge; dementsprechend weichen die λ-Werte schon von niedrigeren R Werten an von der Pois.-Geraden ab.

schen den niedrigen und den hohen kritischen Zahlen zu schließen, die je nach der benützten Versuchsanordnung (s. o.!) auftraten. Um hier auch zu höheren kritischen Zahlen zu kommen, mußte dem Einlaufstück eine geeignete Abrundung erteilt werden. Die veränderliche Störung am Einlauf wurde dadurch hervorgebracht, daß eine kreisrunde Platte der Einlauföffnung mehr und mehr genähert wurde, so daß die Zuströmung durch den ringförmigen Spalt zwischen Einlaufstück und Platte erfolgte. Je näher die Platte gebracht wurde, desto stärkere Wirbel mußten ins Rohr gelangen.

Das Ergebnis der Messungen zeigt Fig. 3. Zu Beginn des Versuchs war die Platte so weit von der Einlauföffnung entfernt (etwa 20 cm), daß sie die Zuströmung zum Rohr nicht wesentlich stören konnte. Die so erhaltene kritische Zahl 6000 entspricht also wohl der an sich noch vorhanden gewesenen Unruhe des Vorratswassers. Erst bei einer Annäherung der Platte bis auf 8 mm wurde die kritische Zahl auf 5000 herabgesetzt. Weitere stufenweise Annäherung setzte auch die kritische Zahl stufenweise herab. Als die Platte nur noch 1,2 mm Abstand hatte, betrug die kritische Zahl 1160. Dieser Wert wurde bei weiterer Annäherung auf 0,6 mm, d. h. weiterer Steigerung der Störung, nicht mehr unterschritten, sondern blieb genau erhalten. Wir haben also augenscheinlich in der Zahl 1160 eine untere Grenze der kritischen Zahlen, kurz „die kritische Zahl", unterhalb deren die Laminarströmung gegen noch so große Störungen stabil ist. Ihre Begründung stellt eine genau umrissene Aufgabe für die theoretische Forschung dar.

In Fig. 3 tritt etwa von $R = 1500$ ab eine mit zunehmenden R-Werten wachsende Abweichung der experimentellen λ-Werte der Laminarströmung von der Poiseuilleschen Geraden auf. Diese Widerstandserhöhung rührt her von der Beschleunigung der Kernströmung, die von annähernd gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt (u) schließlich zu der parabolischen Poiseuilleschen Verteilung mit der maximalen Geschwindigkeit $2\,\bar{u}$ führt. Eine Näherungstheorie, die auf den Vorstellungen der Prandtlschen Grenzschichtentheorie fußt, liefert gute Übereinstimmung mit der experimentellen Abweichung.

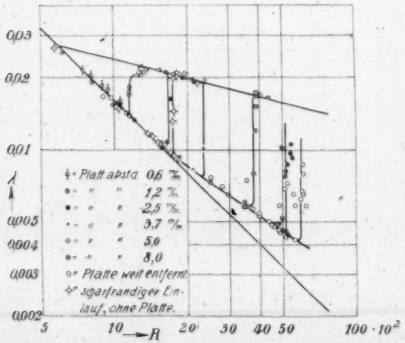


Fig. 3.

Eine auf Grund dieser Theorie des Anlaufwiderstandes von Herrn Kirsten und mir durchgeführte Diskussion von Versuchen des Herrn Sorkau ergab, daß der dort für die kritische Zahl angegebene Wert 224 nicht den Eintritt der Turbulenz darstellt, sondern diejenige Reynoldssche Zahl, von der ab sich der Anlaufwiderstand bemerklich macht. Auch die von Herrn Sorkau angenommenen verschiedenen „Turbulenzstadien" haben keine Realität, vielmehr hat man für glatte Rohre nur eine ganz bestimmte Art der Turbulenz anzunehmen, die weitgehend dem Blasiusschen Widerstandsgesetz gehorcht.

Zur Prüfung der mehrfach ausgesprochenen Behauptung, daß rauhe Rohre niedrigere kritische Zahlen zeigten als glatte, unternahm ich schließlich noch Messungen an Rohren, denen durch ein flachgängiges Gewinde eine beträchtliche Rauhigkeit erteilt wurde. Versuche mit scharfrandigem Einlauf zeigten keinerlei Beeinflussung der kritischen Zahl durch die Rauhigkeit, bei abgerundetem Einlauf erhielt ich mit einem rauhen Rohr sogar bis 9600 Laminarströmung.

Hieraus folgt, daß die Rauhigkeit so lange keinen Einfluß auf die kritische Zahl besitzt, als irgendwo eine Stelle stärkerer Störung vorhanden ist und daß man auch für rauhe Rohre 1160 als unterste kritische Zahl annehmen muß. Die kritische Zahl ist stets durch die maximale vorhandene Störung bestimmt. Ein experimentelles Argument dafür, daß die mikroskopischen Wandrauhigkeiten des technisch glatten Rohres eine Rolle bei der Turbulenz spielen, liegt sonach jedenfalls nicht vor.

Zusammenfassend ist zu sagen: Es existiert eine unterste kritische Zahl, 1160, für glatte und rauhe Rohre. Die Existenz einer oberen kritischen Zahl bleibt offen, ist aber nicht wahrscheinlich.

Diskussion.

v. Mises: Der Behauptung des Vortragenden daß die bisherigen Versuchsergebnisse zwischen

200 und 22500 schwanken, muß ich widersprechen. Seit den ersten Veröffentlichungen von Reynolds weiß jeder, der sich mit der Sache beschäftigt hat, daß die kritische Zahl etwa bei 1000 zu suchen ist. Die Zahl 22500 stammt von Versuchen Ekmans, der unter besonderen Vorsichtsmaßnahmen die laminare Bewegung weit über die Stabilitätsgrenze steigerte. Wenn es einmal gelungen ist, unter entsprechenden Vorkehrungen Wasser auf minus 40° zu unterkühlen, so darf man dies offenbar nicht dahin deuten, daß der Gefrierpunkt mit einer Ungenauigkeit von 40° bestimmt sei. Die kleinere vom Vortragenden genannte Zahl 200 wird von Ruckes für Rohre von besonders großer Rauhigkeit angegeben und dürfte allerdings viel zu niedrig sein. Aber die Frage, ob Rauhigkeit die Lage der kritischen Grenze beeinflußt, scheint mir nicht völlig geklärt durch einen Versuch an Rohren mit eingeschnittenem Gewinde, da es möglich ist, daß gerade die statistische Unregelmäßigkeit der Unebenheiten von Bedeutung sein könnte.

Schiller: Der von Herrn v. Mises gewählte Vergleich mit der Labilität einer unterkühlten Flüssigkeit liegt nahe und ist so oder ähnlich auch schon mehrfach ausgesprochen worden. Trotzdem hielt ich eine von Voraussetzungen und Analogieschlüssen freie Darstellung des Beobachteten einerseits und des prinzipiell Möglichen andrerseits für zweckmäßig. — Die kritische Zahl ist durchaus nicht schlechtweg bei 1000 zu suchen, siehe z. B. in obiger Fig. 1 bei 1700—1800 (ohne irgendwelche Vorsichtsmaßregeln gewonnen). Die Resultate von Ruckes wurden nicht an Rohren von besonderer großer Rauhigkeit gewonnen, sondern an Metallkapillaren von normaler Wandbeschaffenheit, d. h. so glatt wie technisch zu erhalten.

v. Kármán: Ich glaube, man hat nicht das Recht, wie es Herr v. Mises tut, a priori zu behaupten, daß eine obere und untere Grenze für die kritische Geschwindigkeit keinen Sinn hätte. Die Behauptung, daß nur eine kritische Geschwindigkeit als obere Grenze des stabilen Bereiches existieren kann, wäre nur dann bindend, wenn die beiden stationären Zustandsreihen — die laminare und die ausgebildete im Gleichgewicht befindliche turbulente Strömungsform — eine gemeinsame „Verzweigungsstelle" hätten. Dies braucht aber keineswegs der Fall zu sein; nach dem bisherigen Stand der Theorie ist es nicht einmal wahrscheinlich. Falls die beiden Zustände für gleiche Reynoldssche Kennwerte bestehen können, hat es wohl einen Sinn nach der unteren und oberen Grenze des Bereiches zu fragen, in welchem ein Übergang stattfinden kann.

Hopf: Das Haften der Flüssigkeit an der Wand spricht nicht gegen einen wesentlichen Einfluß der Rauhigkeit auf den Eintritt der Turbulenz; denn bei der Kleinheit der Grenzschichten können sich infolge der Rauhigkeit Totwasser, Wirbel und dergl. bilden, welche die Verhältnisse in der Nähe der Wand wesentlich ändern. Andererseits scheint es mir unberechtigt, nur ein Rohr mit ganz unregelmäßigen Wanderhebungen als ein „rauhes" anzusehen. Die Wandrauhigkeit der Hydraulik kann nicht anders als hydraulisch definiert werden, nämlich durch das Verhalten des Druckabfalls bei großen Reynoldsschen Zahlen, und in diesem Sinne ist das von Herrn Schiller verwendete Rohr zweifellos ein rauhes. Systematische Versuche, welche den Einfluß der Rauhigkeit verschiedener Art auf den Druckabfall klarstellen sollten, sind im Aachener aerodynamischen Institut in Gang; die dortige Wassernot hat verhindert, daß die Ergebnisse hier schon vorgelegt werden konnten.

L. Prandtl (Göttingen), Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz.

Die bisherigen mathematischen Untersuchungen über die Enstehung der Turbulenz haben zu der Ansicht geführt, daß die kleinen Schwingungen einer durch Zähigkeitswirkungen zwischen zwei Wänden entstandenen Laminarströmung immer gedämpft verlaufen[1]). Die beobachtete Turbulenz sollte deshalb das Ergebnis von Störungen mit endlicher Amplitude sein. Die bei den Versuchen gefundene Abhängigkeit des kritischen Zustandes von der Größe der Eintrittsstörung, vgl. den vorangehenden Vortrag von L. Schiller, schienen für diese Ansicht zu sprechen.

Um zu erfahren, wie denn die Turbulenz in Wirklichkeit entsteht, ließ ich in Göttingen einen 6,5 m langen offenen Kanal von rechteckigem Querschnitt (15 cm weit, 25 cm tief) herstellen und beobachtete die Strömung darin nach der Ahlbornschen Methode (aufgestreutes Lykopodium). Die Erwartung, daß es nunmehr sofort offenbar werden würde, wie die Turbulenz entsteht, wurde aber fürs erste enttäuscht. Es war zunächst nur festzustellen, daß sie entsteht. Plötzlich, ohne erkennbare Vorbereitung, tauchten in der Nähe einer Wand kleine Wirbelchen auf, die sich nun schnell

1) Der von Herrn F. Noether in den Göttinger Nachrichten 1917, math.-phys. Kl., S. 199, untersuchte Fall, der bei Reibungslosigkeit wie bei kleiner Reibung Instabilität ergibt, scheidet hier aus, weil die dortige Geschwindigkeitsverteilung in den hier in Betracht zu ziehenden Fällen niemals entstehen kann.

vermehrten. Außerdem sah man manchmal wellige Formen mit langsam zunehmender Amplitude, die aber nicht immer zu einer eigentlichen Turbulenzerscheinung führten. Diese Wellen mit zunehmender Amplitude widersprachen aber ganz dem Dogma von der Stabilität der kleinen Schwingungen, so daß ich zuerst dazu neigte, zu glauben, daß ich diese nicht sehr häufige Erscheinung nicht ganz richtig gesehen hätte.

Wir warfen uns nun auf die theoretische Behandlung und, um es gleich vorweg zu nehmen, wir fanden entgegen dem Dogma eine Labilität der kleinen Schwingungen.

Der Plan der Rechnung war zunächst ein anderer gewesen. Wir, d. h. wesentlich Herr O. Tietjens, der unter meiner Leitung die Rechnungen machte, untersuchten die Stabilität und Labilität von Laminarströmungen, wie sie längs einer Wand durch länger dauernde Einwirkung einer geringen Zähigkeit entstehen[1]) und zwar nach der von Lord Rayleigh angegebenen Methode unter Vernachlässigung der Reibung[2]). Rayleigh ersetzt das Geschwindigkeitsprofil durch einen geknickten Linienzug, was darauf hinaus kommt, daß Differenzengleichungen an Stelle der Differentialgleichungen treten[3]). Die von uns untersuchten Geschwindigkeitsprofile entsprechen der nebenstehenden Figur.

Es zeigte sich nun, daß jede noch so kleine Einbuchtung von der Art des Profils *c* Labilität ergibt. Solche Einbuchtungen kommen vor allem bei der Umströmung von gerundeten Körpern zwischen dem Geschwindigkeitsmaximum und der Ablösungsstelle vor. Durch die erwähnte Rechnung ist also der Grund für die Labilität der

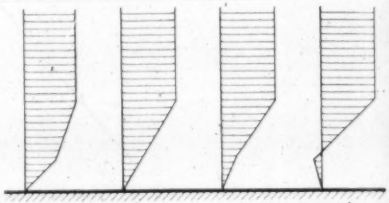


Fig. 1.

Grenzschicht, die bei der Strömung um Kugeln und andere gerundete Körper zur Turbulenz und zu dem bekannten Sprung in der Widerstandszahl führt[1]), aufgedeckt. Bei einer Strömung im Rohr oder an einer ebenen Wand können solche Einbuchtungen des Geschwindigkeitsprofils durch hinreichend starke in der Strömung vorhandene Wirbel — aber auch durch mangelhafte Ebenheit der Wand — erzeugt werden, und so die Bedingungen für das Entstehen einer Anzahl kleinerer Wirbel sein.

Wenn, wie anzunehmen war, die Zähigkeit eine Dämpfung, also eine Verringerung der Labilität brachte, so mußte sich für jede Größe der Anfangsstörung eine Reynoldssche Zahl ergeben, unterhalb der die Labilität verschwand; die stärkeren Störungen brachten stärkere Einbuchtung des Geschwindigkeitsprofils und damit stärkere Labilität; dieser entsprach eine niedrigere kritische Zahl in schönster Übereinstimmung mit dem Versuch.

Wir gingen also daran, unsere Rechnung durch Berücksichtigung der niedrigsten Ordnung der Zähigkeit zu verbessern. Bei der Untersuchung der verschiedenen Reibungseinflüsse

---

1) Setzt man z. B. zur Zeit $t = 0$ für

$$y > 0 \quad U = U_0 = \text{const}$$

und fordert $U = 0$ für $y = 0$, $t > 0$ entsprechend dem Haften an der Wand, so ergibt eine bekannte Rechnung

$$U = \frac{2\,U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\, d\eta ,$$

wobei $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ ist. Für Zeiten von der Größenordnung $T = \frac{{y_1}^2}{4\nu}$ erlangt die Übergangsschicht eine Dicke von der Größenordnung y_1.

2) On the stability or instability of certain fluid motions II. Proc. Lond. math. Soc. XIX, S. 67, 1887 = Papers III, S. 17.

3) Die Rayleighsche Untersuchung nimmt eine wellenförmige Störung u, v an, die sich der Hauptströmung $U(y)$ überlagert. u und v mögen den Faktor $e^{i(kx+nt)}$ haben. Ihre Abhängigkeit von y ist noch unbekannt. Die Kontinuität liefert in komplexer Schreibweise $u = -\frac{i}{k}\frac{\partial v}{\partial y}$; die Helmholtzsche Wirbelgleichung liefert sodann, wenn die 2. Ordnung in u, v vernachlässigt wird,

$$\left(\frac{n}{k} + U\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 v\right) - v\,\frac{d^2 U}{dy^2} = 0.$$

Setzt man mit Rayleigh streifenweise $\frac{dU}{dy} = \text{const}$, so wird im Innern der Streifen, da im allgemeinen $\frac{n}{k} + U \neq 0$ ist, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k^2 v$, also $v = A\,\mathfrak{Sin}\,ky + B\,\mathfrak{Cos}\,ky$. Für die Grenze zwischen zwei Streifen wird durch Integration und Grenzübergang auf Breite Null der Übergangszone

$$\left(\frac{n}{k} + U\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\text{II} - \frac{\partial v}{\partial y}\text{I}\right) = v\left(\frac{dU}{dy}\text{II} - \frac{dU}{dy}\text{I}\right).$$

Zusammen mit den Grenzbedingungen an den Wänden (oder — bei uns — an der Wand und im Unendlichen) ergibt sich eine Determinante, aus der n bestimmt wird. Die Gleichung für n ist von ebenso hohem Grade, als das Geschwindigkeitsprofil Knicke hat.

1) Vgl. etwa C. Wieselsberger, diese Zeitschr. 22, 321, 1921.

zeigte sich, daß bei kleiner Zähigkeit ein Einfluß von der Größenordnung $\sqrt{\nu}$ vorherrscht, der von Vorgängen in der unmittelbaren Wandnähe herstammt (ν = kinematische Zähigkeit $= \mu/\varrho$). Da die reibungslose Rayleigh-Schwingung ein Gleiten an der Wand ergibt, entsteht nämlich hier bei Berücksichtigung der Reibung eine dünne Grenzschicht, in der sich der Übergang von der Geschwindigkeit Null an der Wand auf die Geschwindigkeiten vollzieht, die die Rayleighsche Rechnung liefert. Daß die in der Rayleighschen Rechnung zur Vereinfachung der mathematischen Aufgabe eingeführten Knicke sich durch die Wirkung der Zähigkeit abrunden würden, braucht uns nicht zu stören, denn diese Knicke sind nur der Rechnung wegen eingeführt; man hat sich in Wirklichkeit an ihrer Stelle runde Formen zu denken, die sich durch die Zähigkeit höchstens um Größen von der Ordnung ν verändern, die wir bereits vernachlässigen. Das ganze Verfahren kommt darauf hinaus, daß wir nur den Streifen von der kleinen Breite der Grenzschicht (Größenordnung $\sqrt{\nu n}$, Bezeichnung siehe Fußnote 3, S. 20) als reibende Flüssigkeit ansehen, das übrige als reibungslose. Wir kommen so auch über die Schwierigkeit hinweg, daß unser Geschwindigkeitsprofil streng genommen nicht stationär ist (die vernachlässigte Veränderung in der Zeit τ ist von der Größenordnung

$$2\nu\tau \cdot \frac{U}{y_1^2}).$$

Wenn man die Rechnung für unsere Grenzschicht unter der Annahme kleiner Schwingungen durchführt, dann ergibt sich eine nicht ganz einfache, jedoch von Sommerfeld und Hopf[1]) bereits sehr sorgfältig untersuchte Differentialgleichung. Wir wollen indes zum Unterschied von den genannten Autoren hier davon Gebrauch machen, daß die Zähigkeit sehr klein ist und ferner auch annehmen, daß die Geschwindigkeit U', mit der die Wellen der Störung in der X-Richtung fortschreiten, nicht zu klein ist, so daß die Schicht, die mit der Geschwindigkeit U' strömt, bereits außerhalb der Grenzschicht liegt[2]). Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (1)$$

[1]) A. Sommerfeld, Atti del IV. congr. intern. dei Mathematici, Rom 1908; L. Hopf, Ann. d. Phys. (4) **44**, 1914.

[2]) Es kommt darauf an, daß der Ausdruck

$$\frac{dU}{dy}\sqrt{\frac{\nu}{kU'^3}}$$

klein bleibt.

Die Rayleighsche Schwingung liefere an der Wand eine Geschwindigkeit $u_1 = Ce^{i(kx+\alpha)}$. Wir fügen eine Zusatzgeschwindigkeit

$$u' = f(y)\,e^{i(kx+\alpha t)}$$

hinzu, mit der Bestimmung, daß $f(0) = -C$ sein soll, um die Grenzbedingung des Haftens an der Wand zu befriedigen. In der Nähe der Wand außerhalb der Grenzschicht gilt genähert

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t};$$

also ergibt sich mit $u = u_1 + u'$ aus Formel (1)

$$i\,n\,f(y) = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

hiermit wird

$$f(y) = -Ce^{\mp(1+i)y\sqrt{\frac{n}{2\nu}}}, \qquad (2)$$

wobei das Vorzeichen so zu wählen ist, daß der reelle Teil des Exponenten negativ wird, damit die e-Funktion mit wachsendem x abklingt.

Die Zusatzbewegung u' bringt vermöge der Kontinuität auch eine Zusatzgeschwindigkeit v' hervor. Es ist

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = -ik u',$$

was wegen $v' = 0$ am Rande

$$v' = \mp\frac{ikC}{1+i}\sqrt{\frac{2\nu}{n}}\left(1 - e^{\mp(1+i)y\sqrt{\frac{n}{2\nu}}}\right)\cdot e^{i(kx+\alpha t)} \qquad (3)$$

gibt.

Während u' außerhalb der Grenzschicht verschwindet, hat v' gemäß Formel (3) für größere y[1]) den asymptotischen Wert

$$v' = \mp(1+i)C\sqrt{\frac{\nu}{2n}}\cdot e^{i(kx+\alpha t)} \qquad (4)$$

Man kann sich die weitere Untersuchung dadurch sehr vereinfachen, daß man so tut, als ob dieser Wert von v' bereits an der Wand vorhanden wäre und daß man im übrigen, abgesehen von dieser Abänderung der Grenzbedingung die Reibung nicht weiter berücksichtigt. Die Rückwirkung der Grenzschicht auf das Innere wird damit richtig dargestellt. Die Geschwindigkeit v' kommt in Wirklichkeit davon her, daß in der Grenzschicht die Geschwindigkeit u durch die Reibung abgeändert ist. Unser vereinfachter Ansatz setzt dafür einen Durchtritt der Flüssigkeit durch die porös zu denkende Wand oder aber eine Schwingungsbewegung der Wand gemäß Gl. (4), wobei dann die Arbeits-

[1]) Die Formel (3) gilt der Ableitung gemäß nur für eine Schicht, in der das reibungslose u, das in Wirklichkeit einen $\frac{\partial u}{\partial y}$ enthält, als konstant nach y angesehen werden kann.

leistung des Druckes genau die Stelle der in Wärme verwandelten Reibungsarbeit in der Grenzschicht einnimmt. Durch diesen Kunstgriff ist es also gelungen, die Zähigkeitswirkungen durch eine einfache Randbedingung für die reibungslose Rayleigh-Schwingung zu ersetzen.

Alle bisher von uns auf diese Weise durchgerechneten Strömungsprofile (vgl. Fig. 2) er-

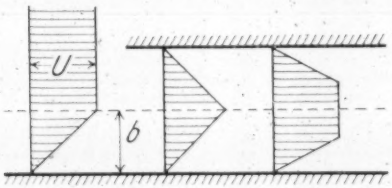


Fig. 2.

geben nun für den Fall, daß die Bewegung ohne Reibung stabil ist, mit Reibung eine Anfachung (negative Dämpfung), und zwar von einem Betrag, der durch Formeln von folgendem Bau wiedergegeben wird:

$$n = r + is, \text{ wobei } s = -\text{Zahl} \cdot \frac{U}{b}\sqrt{\frac{\nu}{Ub}}.$$

(Der Ausdruck unter der Wurzel ist das Reziproke der Reynoldsschen Zahl; die „Zahl" in der Formel ist eine von den Daten des Profils abhängige Funktion der Wellenlänge der Störung.)

Wir haben dieses Ergebnis erst nicht glauben wollen und haben es daraufhin jeder dreimal unabhängig auf verschiedene Weise gerechnet. Es kam aber immer wieder dasselbe Vorzeichen, das Labilität bedeutet. Die begangenen Vernachlässigungen sind unter der Annahme einer sehr kleinen Zähigkeit einwandfrei. Das Ergebnis muß also hingenommen werden. Den bisherigen theoretischen Ergebnissen gegenüber, die immer Stabilität geliefert hatten, ist darauf hinzuweisen, daß diese ausschließlich den sogenannten Couetteschen Fall behandeln[1]), der sich auf die lineare Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei aneinander vorbei bewegten parallelen Wänden bezieht. Diese Strömung ist im Rayleighschen Sinn nicht schwingungsfähig[2]). Die von uns untersuchten Strömungen besitzen aber sämtlich, reibungslos betrachtet, stabile Eigenschwingungen, d. h. sie sind einer ungedämpften Wellenbewegung fähig. Das Vorhandensein einer solchen Wellenbewegung ist aber gerade die Vorbedingung für die von uns untersuchten Grenzschichtvorgänge.

Um die Rolle der Grenzschicht für das Labilwerden der Strömung besser zu verstehen, ist es ganz lehrreich, die Reynoldssche Energiebetrachtung darauf anzuwenden, mit der auch H. A. Lorentz in seiner bekannten Abhandlung[1]) arbeitet. Dort wird die Zunahme der Energie der Störungsbewegung als die Differenz zwischen zwei Ausdrücken dargestellt, von denen der erste (M) die von der Hauptbewegung auf die Störungsbewegung übergehende Energie, der zweite (N) die der Störungsbewegung durch Reibungsarbeit entzogene (dissipierte) Energie darstellt. Der letztere Term liefert notwendig immer eine Dämpfung. In unserem Falle zeigt die nähere Untersuchung, daß die Dissipation in der Grenzschicht einen Betrag mit dem Faktor $\sqrt{\nu}$ ergibt, die ganze übrige Laminarströmung dagegen einen Betrag mit dem Faktor ν. Bei kleinem ν tritt der letztere Anteil also in der Tat gegen den ersteren zurück.

Der M-Term nimmt bei unserer Aufgabe den Ausdruck

$$\int\int \frac{dU}{dy} \cdot uv \cdot dx\, dy$$

an, wo U die gegebene Laminarströmung ist. Der Wert dieses Ausdrucks hängt vor allem von dem Phasenunterschied der u-Welle und der v-Welle ab. Bei einem Phasenunterschied von 90°, wie er sich bei Reibungslosigkeit im Falle der stabilen Schwingung ergibt, ist der Ausdruck = 0. Die Bewegung v', die von der Grenzschicht geliefert wird, hat nun eine Phasenverschiebung von 135° sowohl gegen u wie gegen das reibungslose v und gibt daher mit u zusammen einen Energieübergang von der Hauptbewegung auf die Störungsbewegung, und zwar gemäß der Rechnung von einem Betrage, der in der Größenordnung mit der dissipierten Energie übereinstimmt, sie aber zahlenmäßig übertrifft. Es bleibt also von der übertragenen Energie immer etwas für das Anwachsen der Störung übrig.

Die durch diese Rechnung geschaffene Lage war nun, obwohl sie die Entstehung der Turbulenz zu erklären schien, gar nicht angenehm, denn es entstand jetzt die umgekehrte Schwierigkeit, wie die Laminarströmung gerettet werden sollte, die doch nach den Versuchen unterhalb der Reynoldsschen Zahl 1000 stabil sein muß.

1) Mit Ausnahme des von Noether untersuchten Falles ($U = ay^3$), für den Blumenthal ebenfalls Stabilität nachwies, vgl. Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309 u. 563.

2) Die Zahl der Freiheitsgrade bei Rayleigh ist für gegebene Wellenlänge um eins kleiner als die Zahl der Streifen.

1) Abhandlungen über theoretische Physik, Leipzig 1907, S. 47 u. f.

Nach unserer vereinfachten Rechnung war dies gar nicht zu verstehen. Es muß aber betont werden, daß durch das geknickte Geschwindigkeitsprofil etwas Künstliches in die Rechnung herein gebracht wird, das besser vermieden würde. Man wird sich dazu entschließen müssen, wirklich einmal gekrümmte Laminarprofile auf ihre kleinen Schwingungen durchzurechnen. Dabei treten, wie schon von Lord Rayleigh festgestellt wurde, an der Stelle im Profil Besonderheiten auf, wo die Phasengeschwindigkeit der Störungswelle mit der Geschwindigkeit der Hauptströmung übereinstimmt. Dort verweilt nämlich ein und dasselbe Flüssigkeitsteilchen dauernd in demselben Druckgefälle, wodurch die Störung bei Reibungslosigkeit nicht klein bleiben kann. Bei Berücksichtigung der Reibung erhält man zwar ein vernünftigeres Resultat, doch werden auch hier die Geschwindigkeiten ziemlich groß. Eine Abschätzung ergab, daß der Betrag der Dissipation hier der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils und der $\frac{2}{3}$ten Potenz der Zähigkeit proportional ist[1]). Anfachung mit $\nu^{1/3}$ und Dämpfung mit $\nu^{2/3}$ würden nur bei passenden gar nicht großen Zahlenfaktoren die großen Reynoldsschen Zahlen ergeben können, die man beobachtet (da die Zahlenfaktoren zur 6. Potenz zu erheben wären). Jedoch steht im Hintergrund noch der M-Term, dessen Vorzeichen noch nicht von vornherein fest liegt und der deshalb die Sache noch umwerfen kann[2]). Hier kann also nur die genaue Durchrechnung weiter helfen.

1) Die Rechnung ergab für die Dissipation pro Längeneinheit die Größenordnung

$$v_1^2 K^2 \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{\left(k\frac{dU}{dy}\right)^3}},$$

wobei K der Mittelwert von $-\frac{d^2U}{dy^2}$ (der „Krümmung des Profils") in dem in Betracht kommenden Streifen und v_1 die Amplitude von v an der Stelle $U = U'$ ist.

2) (Zufügung Oktober 1921.) Hier ergeben sich zwei Terme von der Größenordnung

$$\frac{\nu^2 K^2 a^2}{k\left(\frac{dU}{dy}\right)^2}$$

von entgegengesetztem Vorzeichen, deren Differenz voraussichtlich eine mit ν klein werdende Größe ist. Von dem Ausfall dieser Differenz hängt alles ab. Möglicherweise ergibt sich für das Parabelprofil (Poiseuille) wieder Stabilität für alle ν, während bei dem Profil von Fußnote 1, S. 20 sicher bei kleinen ν Instabilität bleiben wird, da hier in der Nähe der Wand $K = -\frac{d^2U}{dy^2}$ sehr klein wird und für kleine k die ausgezeichnete Schicht ($U = U'$) nahe der Wand liegt.

Diskussion.

Sommerfeld: Es ist sehr merkwürdig und auf den ersten Blick unwahrscheinlich, daß der Couettesche Fall, wie Hopf und v. Mises gezeigt haben, bei unendlich kleinen Störungen stabil, alle übrigen Strömungsfälle nach Herrn Prandtl aber instabil sein sollen. Die Beobachtung läßt keinen solchen Unterschied erkennen, sondern ergibt in allen Fällen Instabilität oberhalb gewisser Grenzen, die allerdings sehr von den näheren Umständen abhängen. Worin liegt nach Ansicht des Herrn Vortragenden der Grund für die Ausnahmestellung des Couetteschen Falles?

Prandtl: Der Couettesche Fall ist, wie sicher vermutet werden muß, gegen endliche Störungen instabil, und solche werden bei den Versuchen schon vorgelegen haben. Die Ausnahmestellung des Couetteschen Falles den kleinen Schwingungen gegenüber sehe ich, wie im Vortrage erwähnt, darin, daß eine reibungslose Bewegung dieser Art keiner Schwingung fähig ist, während andere Geschwindigkeitsvorstellungen solche Schwingungen besitzen[1]).

v. Kármán: Die Unterscheidung zwischen schwingungsfähigen und nicht schwingungsfähigen Systemen — wie sie Herr Prandtl darstellt — scheint mir nicht ohne Willkür zu sein, zudem man sich auf Geschwindigkeitsverteilungen beschränkt, welche aus geraden Linien bestehen, und an bestimmten, zunächst willkürlichen Stellen, einen Knick bilden.

Es erscheint mir ferner zweifelhaft, ob man durch direkte Beobachtung der entstehenden Wirbel über das Wesen der Turbulenz etwas erfahren wird. Was man beobachtet, sind zumeist die ungemein komplizierten, durch allerlei Zufall beeinflußten Vorgänge im Übergangsgebiet zwischen laminarer und turbulenter Strömungsform. Die im statistischen Gleichgewicht befindliche stabile, turbulente Strömungsform entzieht sich zunächst der direkten Beobachtung, weil die Vorgänge viel zu rasch vor sich gehen.

Hopf: Der Begriff der „schwingungsfähigen Strömung" macht mir Schwierigkeiten. Betrachtet

1) Zusatz beim Druck:
Die Schwingungen kommen in der Weise zustande, daß durch Querverschiebungen in der Flüssigkeit die Verteilung der Wirbelstärke geändert wird, woraus wieder Querbewegungen resultieren. Dies ist aber beim Couetteschen Fall nicht möglich, da hier die Wirbelstärke über die ganze Strömung konstant ist. Hier könnte eine Querbewegung nur durch zusätzlich der Strömung aufgeprägte Wirbel erzeugt werden; solche Wirbel sind aber auszuschließen, da für ihre Entstehung kein Grund vorliegt, sofern man sie nicht etwa als Einlaufstörung ansehen will. Die Hopfschen Rechnungen zeigen aber, daß sie, sofern sie schwach genug sind, abklingen.

man die Bewegung reibender Flüssigkeiten, so besteht sicher kein Unterschied zwischen schwingungsfähigen und nicht schwingungsfähigen Strömungen; dieser Unterschied tritt erst hervor, wenn man zur Grenze $R = \infty$, d. h. Reibung Null übergeht. Ich habe zwei verschiedene Strömungen untersucht, nämlich die Couettesche mit der gewöhnlichen und mit einer veränderten Randbedingung; dabei ergibt der Grenzübergang bei der ersten nie eine reine Potentialschwingung ohne Singularität, wohl aber bei der zweiten. In der Tat erweist sich die Strömung nur gegen solche Störungen als instabil, die bei Reibung Null in reine Potentialschwingungen übergehen: Man muß wohl nur diese Potentialschwingungen und nicht die anderen Formen unendlich kleiner Schwingungen, die sich im wesentlichen auf Singularitäten in schmalen Strömungsschichten konzentrieren, als „Schwingungen" in dem von Herrn Prandtl gebrauchten Sinne ansehen.

Prandtl: Der Bemerkung von Herrn Hopf glaube ich zustimmen zu können. Herrn v. Kármán erwidere ich, daß ich nach erlangter theoretischer Klärung doch aus dem Versuch allerhand Nützliches ersehen konnte, wenn nicht durch den bloßen Augenschein, so doch durch das Betrachten von photographischen Aufnahmen. Ich zeige hier noch eine photographische Aufnahme[1]), die das Vorgetragene sehr gut zu erläutern vermag. Die Aufnahme, die in Fig. 3

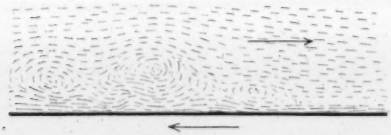


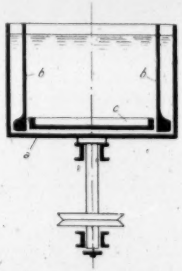
Fig. 3.

wiedergegeben ist, bezieht sich auf eine Strömung in dem oben genannten Kanal bei abgerundetem Einlauf und bei einer Reynoldsschen Zahl von rund 15000. Die photographische Kammer befand sich auf einem Wagen, der parallel zur Kanalachse gefahren werden konnte und bewegte sich bei der Aufnahme mit einer Geschwindigkeit, die etwa $^4/_5$ der Geschwindigkeit des Wasserstromes in der Mitte des Kanals betrug. Dadurch erscheinen in der Aufnahme solche Punkte der mit Lykopodium bestreuten Oberfläche als Punkte, die die gleiche Geschwindigkeit wie die Kammer hatten. Man sieht deutlich von links her zwei große Wirbel vorrücken. Rechts von ihnen sieht man einen schwächer ausgebildeten. Die „Gruppengeschwindigkeit" der hier in Betracht kommenden Wellenbewegung ist nach der Rechnung größer als die Phasengeschwindigkeit, es bauen sich also — ebenso wie bei den Kapillarwellen — an eine Wellengruppe immer neue Wellen vorne an. Der erwähnte flache Wirbel ist also ein neuer im Entstehen begriffener Wellenberg der Störung anzusehen, der sich vor dem bereits vorhandenen aufbaut. Da sich die Wellenberge hier in Wirbel verwandeln, kommt ein Erlöschen entsprechender Wellen auf der Rückseite der Gruppe, wie es bei reinen Wellenbewegungen beobachtet wird, hier nicht in Frage.

Die im ersten Teil des Vortrages besprochene Erscheinung, daß durch vorhandene Störungen labile Zustände geschaffen werden, die zur Bildung neuer kleinerer Wirbel Anlaß geben, kann auf der linken Seite der Figur beobachtet werden, wo unter den großen Wirbeln bereits kleinere entstanden sind, die sich durch einen welligen Verlauf der Stromlinien kenntlich machen.

Cl. Schäfer fragt den Vortragenden nach seiner Ansicht über die Versuchsanordnung von Couette. Er selbst habe die Absicht, den Couetteschen Versuch zu wiederholen.

Prandtl: Auf die Frage von Herrn Schäfer erwidere ich, daß ich in der Tat die Couetteschen Versuche für wiederholungsbedürftig halte, und daß ich glaube, daß man im idealen Fall dabei keine kritische Geschwindigkeit würde finden dürfen. In Wirklichkeit wird durch irgendeine Störung von endlicher Größe immer Turbulenz entstehen können und der turbulente Zustand wird sich dann auch erhalten. Solche Störungen können bei der Couetteschen Anordnung vom



a = umlaufende Trommel,
b = ruhender Meßzylinder, an einer Torsionswage befestigt,
c = ruhende Scheibe.

Fig. 4.

Boden herauf kommen; auch ungenügende Zentrierung der beiden Zylinder kann die Ur-

1) Statt des Lichtbildes ist eine Zeichnung wiedergegeben, da die Einzelheiten der Aufnahme bei der Wiedergabe im Druck zu sehr an Deutlichkeit verlieren würden.

sache sein. Man müßte demnach die Versuche einmal mit besonderer Sorgfalt wiederholen und dabei z. B. durch eine enge Stelle am unteren Rande des Versuchsspaltes dafür sorgen, daß keine Wirbel von unten herauf kommen können. Eine Versuchsanordnung nach der Skizze (Fig. 4) würde mir hierfür geeignet erscheinen.

E. Wiechert (Göttingen), Prinzipielles über Äther und Relativität.

Meine Damen und Herren! In Hinblick auf die Kürze der zur Verfügung stehenden Zeit beschränke ich mich darauf, ein bekanntes Gedankenexperiment zu besprechen, das ich den „Versuch der verschiedenen Raumzeitwege" nenne. Es wird öfters als das „Uhrenparadoxon der Relativitätstheorie" bezeichnet. — Der Theorie von H. A. Lorentz und ihrer weiteren Ausgestaltung durch A. Einstein entnehme ich die Hypothese der Gültigkeit der Lorentztransformation; ich setze also voraus, daß bei Änderung der Schreitung[1]) eines physikalischen Systems im ganzen jene Änderungen der Dimensionen der Körper und der Ablaufsgeschwindigkeiten der Vorgänge stattfinden, welche durch die Lorentztransformation angezeigt werden. Diese Hypothese ist durch eine Reihe von Beobachtungstatsachen, wie es scheint, sehr gut begründet. — Es wird sich also im folgenden um die Deutung von Erscheinungen handeln, die als gegeben betrachtet werden.

Unser „Versuchsfeld" suchen wir uns im Weltenraum zwischen den Sternen. Die „physikalischen Systeme", von denen die Rede sein wird, sollen als kleine Weltkörper vorgestellt werden, welche Beobachter mit ihrem Gerät tragen. Die gegenseitigen Störungen der Weltkörper denken wir uns durch die Rechnung eliminiert. Der Maßstab der Versuche wird so groß gewählt, daß die Weltkörper als Punkte gelten können. Indem die Uhrangaben hinzugenommen werden, bestimmen die Weltkörper jeweilig „Raumzeitpunkte". Der Vorübergang zweier Weltkörper aneinander gibt eine „Koinzidenz".

Den Versuch der verschiedenen Raumzeitwege beschreibe ich zunächst in der „Stafettenform", die ich in meiner Arbeit „Der Äther im Weltbild der Physik" gewählt habe. Auf diese Arbeit, die in diesem Jahr in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und als Sonderschrift im Handel[1]) erschienen ist, verweise ich in bezug auf weitere Einzelheiten. Alle beteiligten Weltkörper A, B_1, B_2 ... (Fig. 1a)

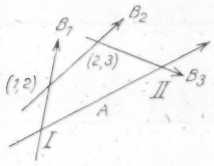


Fig. 1a.

bleiben während des Versuches sich selbst überlassen. Anfang und Ende des Versuches werden durch die beiden Koinzidenzen I und II angezeigt, die der Körper A mit dem ersten und letzten Körper der B-Reihe erfährt. Die „Stafette" wird durch die B-Körper gebildet, welche sich in unserer Vorstellung bei den Koinzidenzen (1, 2), (2, 3) ... nacheinander ablösen. Jeder nächste Körper der Reihe setzt so gewissermaßen das Schicksal des vorhergehenden fort. Relativ zu A soll die Geschwindigkeit aller Glieder der Stafette gleich groß sein, und zwar $= v$.

Die Lorentztransformation sagt uns in der bekannten Anwendung, daß von A aus beurteilt die Vorgänge auf der Stafette infolge der Geschwindigkeit v verlangsamt erscheinen im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Beachten wir z. B. das Licht einer beliebig ausgewählten Spektrallinie, das von Lichtquellen auf den Weltkörpern A, B_1, B_2, ... ausgesandt wird. Es sollen dann auf der Stafette zwischen den Koinzidenzen I und II weniger Schwingungen stattfinden als auf A. Die Zählungen der Schwingungen können dabei auf den betreffenden Weltkörpern selbst zwischen den in Betracht kommenden Koinzidenzen vorgenommen werden, also zwischen I und II für A, zwischen I und (1, 2) für B_1 usw. Für die Stafette gilt die Summe der Schwingungszahlen auf den einzelnen Gliedern. — Statt der Lichtschwingungen in diesem Falle kann, wie bekannt, in einem anderen interessanten Beispiel auch das Altern von Lebewesen gewählt werden. —

Die Stafette darf für die Vorstellung durch einen einzigen Körper B ersetzt werden, der in den Knickpunkten der Bahn Änderungen der Richtung der Bewegung relativ zu A erfährt. Es erscheint nämlich, wie ich das schon in meiner Arbeit[2]) von 1911 darlegte, ohne

1) Schreitung = Bewegungszustand, soweit dieser dem Beobachter als Ruhe oder Geschwindigkeit erscheint.

1) Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung.
2) Diese Zeitschr. **12**, 689, 737, 1911.

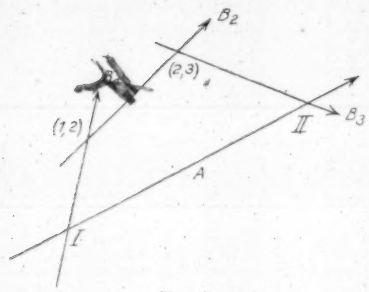


Fig. 1b.

physikalische Schwierigkeiten möglich, die Störungen des Versuches infolge der Schreitungsänderungen durch die Rechnung zu eliminieren. Denken Sie sich z. B. den Versuch zweimal nacheinander durchgeführt (Fig. 1a und Fig. 1b), wobei die Schreitungsänderungen in gleicher Weise erfolgen, während zwischen den Koinzidenzen in einem gewissen Verhältnis, verschieden lange, Zeiten liegen. Dann geht der Einfluß der Störungen in das Endresultat verhältlich verschieden ein, kann daher festgestellt und durch die Rechnung eliminiert werden. — Es liegt kein Grund vor, die Anzahl der Knickstellen zu beschränken, wir können also auch stetig gekrümmte Bahnen für B zulassen; auch wären Geschwindigkeitsänderungen relativ zu A erlaubt; doch ist es heute nicht nötig, diese Erweiterungen des Versuches zu beachten. Wichtig ist aber, die einfachste Form des Versuches zu betrachten, die sich ergibt, wenn B nur eine einzige Schreitungsänderung erfährt (Fig. 2): Von A aus

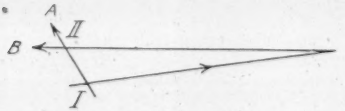


Fig. 2.

gesehen, scheint dann der Körper B sich im ersten Teil des Versuches mit der Geschwindigkeit v zu entfernen und im zweiten Teil sich mit derselben Geschwindigkeit wieder anzunähern. Ich werde den Versuch in dieser speziellen Form den „Versuch der drei Schreitungen" nennen.

Zwischen den Koinzidenzen I und II ist für die Bewohner von B der Fortschritt der Vorgänge kleiner als für die Bewohner von A. Die Bewohner von B kommen z. B. weniger gealtert zur Koinzidenz II. Es ist also für B die Zeit scheinbar weniger vorgeschritten als für A! Was bedeutet dieser Unterschied, und was lehrt der Faktor

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}\,?$$

Hiermit sind wir zu den Kernfragen gekommen.

Die verschiedenen Autoren haben sich gegenüber dem Versuch und seiner Deutung sehr verschieden verhalten. Es scheint mir, daß das Verhalten geradezu als ein Prüfstein für den theoretischen Standpunkt gelten kann. — Was ich im folgenden bringe, habe ich in Einzelheiten schon 1911 dargelegt. Ich verwerte den Versuch, um die Richtigkeit der folgenden Behauptung zu erweisen: Grundsätzlich darf keine Schreitung als physikalisch gleichwertig mit einer anderen betrachtet werden. Wenn z. B. in unserem Versuchsfeld zwischen den Sternen einer der kleinen Weltkörper in eine andere Schreitung gebracht wird, so soll damit sein Zustand in der Welt im ganzen wesentlich geändert sein. Diese Behauptung, so sehr sie den gewöhnlichen Gedankengängen der Relativitätstheorie widerspricht, kann nur dann in Erstaunen setzen, wenn man bei der Betrachtung des Körpers von der übrigen Welt ganz absieht, wenn man so tut, als ob der Körper allein in der Welt wäre und für sich schon etwas Selbständiges darstelle. Aber es ist durchaus unerlaubt, so vorzugehen. Die andere Welt ist doch nun einmal vorhanden, und der betrachtete Körper ist unlösbar mit ihr verkettet. So hat denn jede Änderung der Schreitung eine Änderung des Zustandes des Körpers im Weltganzen zur Folge. —

Fassen Sie den Versuch der 3 Schreitungen ins Auge. Benutzt man eine oft gebrauchte Analogie, welche die 4-dimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit der wirklichen Welt mit einem gedachten 4-dimensionalen Raum vergleicht, so erscheint die Bahn von A zwischen den Raumzeitpunkten I und II als „geradeste Bahn", während B uns einen „Umweg" zeigt, der mit wachsender Geschwindigkeit v größer wird (man vergleiche in Fig. 3 die Bahnen B

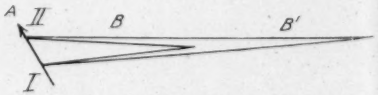


Fig. 3.

und B'). Beim Analogon in dem 4-dimensionalen Raum wäre der Umweg länger als die

gerade Verbindung; hier, in der wirklichen Welt, ist es umgekehrt: Je größer der „Umweg", je größer also v, um so kleiner wird $\sqrt{1-v^2/c^2}$, um so geringer zeigt sich also der Fortschritt der Vorgänge auf B. Die Länge der Bahn von B, gemessen an dem Fortschritt der Vorgänge, sinkt sogar auf null herab, wenn v an die Lichtgeschwindigkeit heranrückt! Könnten wir mit Lichtgeschwindigkeit reisen, so würden wir nach der Theorie gar nicht altern, wir würden unsterblich werden! Sie erkennen an diesem Beispiel, daß die Lichtschreitungen für die Physik der Materie entscheidend wichtig sind. Eine Fülle weiterer Beispiele ließe sich aufzählen. — Da der Faktor

$$\sqrt{1-v^2/c^2}$$

für $v > c$ imaginär wird, muß weiter geschlossen werden, daß die Materie zum mindesten in der uns vertrauten Form Überlichtschreitungen nicht annehmen kann. Die Überlichtschreitungen haben also für die Physik der Materie eine tief eingreifend andere Bedeutung als die Unterlichtschreitungen. — Wie die Erfahrung lehrt, sind die Lichtschreitungen von der Bewegung der Lichtquelle unabhängig. Sie erscheinen also z. B. in unserem Versuchsfeld fest gegeben. Was gibt ihnen dort ihre Bestimmtheit, was zwingt die Materie unter ihre Herrschaft? Weshalb insbesondere bilden die Lichtschreitungen für die Schreitungen der Materie eine Grenze von jener merkwürdigen Bedeutung, die wir eben kennen lernten?

Es ist erstaunlich, daß diese Fragen, die in dem Mittelpunkt der physikalischen und erkenntnistheoretischen Diskussionen über Zeit, Raum, Materie und Äther stehen sollten, so ganz vernachlässigt werden. Ihre ernstliche Beachtung hätte die Ätherverneinung der letzten Jahre unmöglich gemacht. Die Sachlage ist nämlich sehr einfach so: Zur Erklärung der körperlichen Wirkungen, die für jede Stelle des Weltenraumes — und zwar auch in der Relativitätstheorie! — vorausgesetzt werden, muß ein körperlich wirkender Weltuntergrund, der Äther, angenommen werden.

Haben wir nun erkannt, daß an jeder Stelle des Weltenraumes Unterlichtschreitungen, Lichtschreitungen und Überlichtschreitungen sich grundlegend für die Physik unterscheiden, so wollen wir jetzt daran gehen, die Unterlichtschreitungen unter sich zu vergleichen. Dazu soll uns der Versuch der 3 Schreitungen dienen. — B gelangt zu Koinzidenz II mit geringerem Fortschritt der Vorgänge als A. B ist also zwischen den Raumzeitpunkten I und II im ganzen genommen in einem Zustand, in welchem die Vorgänge langsamer ablaufen. Nähert sich v an c an, so wächst die Verzögerung ohne Grenzen bis zu beliebig weitgehender Hemmung des Ablaufs der Vorgänge. Die Bewegungsumkehr von B als solche ist, wie wir sahen, für den Versuch ohne Bedeutung; sie war nur nötig, um eine zweite Koinzidenz zwischen den Körpern B und A zu erzielen. So gelangen wir denn zu dem Schluß, daß der Ablauf der Vorgänge auf einem Körper sich „wirklich", d. h. wirkungsvoll, ohne Grenzen verlangsamt, wenn die Schreitung des Körpers sich unendlich nahe an die Lichtschreitungen annähert. Damit ist der physikalische Unterschied der Unterlichtschreitungen untereinander im Weltgeschehen erwiesen. — Es gibt nur eine Möglichkeit, der Folgerung auszuweichen: Man muß den menschlichen Verstand für unfähig erklären, hier „richtig", d. h. naturgemäß zu denken. Es ist unverkennbar, daß manche Relativitätstheoretiker geneigt scheinen, das zu tun. Aber welchen Zweck hätte denn ein solch radikales Vorgehen? Soll die Gleichwertigkeit der Schreitungen um jeden Preis gerettet werden? Da muß ich fragen, warum das denn nötig wäre? Wir haben doch vorhin erkannt, daß gerade die Ungleichwertigkeit als das Natürliche erscheint, sobald beachtet wird, daß die Körper nicht für sich bestehen, sondern Glieder der Gesamtwelt sind. —

Aus der Erfahrung ist zu schließen, daß die Verkettung jedes Körpers mit der übrigen Welt durch den Weltuntergrund, den Äther, geschieht. In diesem also werden wir die unmittelbare Ursache für die physikalische Verschiedenheit der Schreitungen sehen müssen. —

Wird die Ungleichwertigkeit der Schreitungen anerkannt, so ergibt sich sofort eine außerordentlich wichtige Folgerung für die Beurteilung der Relativitätsgesetze: Grundsätzlich darf kein Koordinatensystem einem anderen als physikalisch gleichwertig betrachtet werden, denn jedes Koordinatensystem ordnet sich an jeder Stelle einer besonderen Schreitung zu. Wiederum kann der Unterschied der Koordinatensysteme nicht wundernehmen, wenn man die Verkettung der Körper in der Welt beachtet, denn jedes andere Koordinatensystem bedeutet für die Beurteilung der Vorgänge in der Welt einen anderen Standpunkt.

Wenn das Einsteinsche allgemeine Relativitätsprinzip dementgegen eine Gleichwertigkeit der Koordinatensysteme behauptet, so kann sich die Gleichwertigkeit jedenfalls nur auf die formale Beschreibung gewisser Vorgänge beziehen, und sie muß eine Folge besonderer Eigenschaften des Äthers und der Verkettung der molekularen Materie mit ihm sein. Dem entspricht genau der wichtige Umstand, daß das Relativitätsprinzip Einsteins selbst in dessen Theorie nur beschränkte Gültigkeit hat: Es darf nur angewandt werden auf Koordinatensysteme, die an allen Stellen dem Unterlichtgebiet der Schreitungen angehören. Diese Beschränkung ist nicht etwa nebensächlich, sondern grundlegend, denn in ihr ruht die Bestimmtheit der Lichtschreitungen, also der beherrschende Einfluß des Weltuntergrundes auf die physikalischen Vorgänge. Wiederum ist es erstaunlich, daß die Beschränkung fast regelmäßig der Beachtung entgeht, selbst in Darstellungen, welche erkenntnistheoretische Ziele verfolgen.

Ich bin am Schluß. Sie werden erkannt haben, daß ich mich gegen die gewöhnliche Auffassung des Einsteinschen Relativitätsprinzipes keineswegs deshalb wende, weil ich die Relativitätsgedanken an sich bekämpfen wollte: Im Gegenteil, meine Absicht ist gerade, diesen Gedanken Geltung zu verschaffen. Es muß aber wohl beachtet werden, daß in der Physik zwei verschiedene Begriffe der Relativität verwertet werden: Die Körperrelativität und die Standpunktsrelativität. E. Mach in seinem Kampfe gegen die Newtonsche Absoluttheorie trat für die Verwertung des Gedankens der Körperrelativität ein. A. Einstein dagegen faßte in seinen Relativitätsprinzipien die Standpunktsrelativität ins Auge. Indem ich mich in dieser Hinsicht an E. Mach anschließe, stelle ich die Körperrelativität in der Physik obenan. Dann ist es geboten, in jedem anderen Koordinatensystem einen anderen Standpunkt in der Beurteilung der Vorgänge in der Welt zu sehen, also etwas physikalisch Verschiedenes. Damit begründet sich der Unterschied meiner Auffassung gegenüber den Relativitätstheoretikern der Einsteinschen Richtung.

Betonen möchte ich, daß ich die Geistesarbeit der Relativitätstheorie gern und hoch anerkenne. Es scheint mir gewiß, daß sie der Physik dauernden Nutzen bringen wird. Dazu ist aber unbedingt nötig, daß Grundlagen und Sinn der Theorie klar erkannt werden.

Ich habe nun noch die Bitte auszusprechen, zu entschuldigen, daß ich nicht die Behandlungen besprochen habe, die der Versuch der verschiedenen Raumzeitwege von anderen Autoren erfahren hat. Der Grund liegt einfach darin, daß ich genötigt war, meinen Vortrag der beschränkten Redezeit anzupassen.

Diskussion.

Goldschmidt: In 5 Minuten kann man nicht über die Frage Raum und Zeit sprechen. Aber einen Hinweis möchte ich mir gestatten, der auch in einer Versammlung von Physikern angebracht ist. Vor mehr als 100 Jahren lebte ein Mann, der eine allgemeinste Relativitätstheorie geschrieben hat. Eine allgemeinste, alles, was wir theoretisch erkennen, erkennen wir durch Relationen, so daß der Raum und auch die Körper an sich selbst in derselben Qualität, in der wir sie durch Vorstellungen erkennen, gar nicht existieren können. Das ist befremdend für den ersten Augenblick. Wenn Sie aber seine Schriften nachlesen, so würden Sie finden, daß dieser naturwissenschaftlich geschulte Mann alle hierher gehörigen Fragen wie kein anderer durchdrungen hat. Ich beanstande bei Einstein den Namen Relativitätstheorie. Denn sie geht von dem Gedanken aus, daß der Raum von absoluter Realität ist. Vor über 20 Jahren ist von mir eine Schrift: „Kant und Helmholtz" veröffentlicht, worin alle Fragen einer empirischen Geometrie erörtert sind. Sie berühren den Ruhm des großen Physikers nicht. Aber er hat das Wort gesprochen: „Der Raum kann transzendental sein, ohne daß es die Axiome sind." Dieser Satz enthält einen Irrtum. Es gibt zwei Möglichkeiten: Leibniz oder Kant. Die beiden sind durch folgendes zu charakterisieren. Wenn man sich den Begriff von einer Sache macht, so geht entweder die Materie der Form voraus oder umgekehrt die Form der Materie.

Gehrcke: Ich möchte mir nur die Bemerkung erlauben, daß die Auffassung des Herrn Vortragenden über die Zeit in grundsätzlicher Hinsicht, soviel ich verstanden habe, wesentlich im Einklang ist mit den Darlegungen des verstorbenen Philosophen Brentano, die in den „Kantstudien" nach dem Tode des Verfassers erschienen sind. Ferner scheinen sie mir im Einklang zu sein mit den Auffassungen des Philosophen Kraus in Prag, besonders in seinem kürzlich erschienenen Aufsatz im „Lotos".

BESPRECHUNGEN.

H. Geiger und W. Makower, Meßmethoden auf dem Gebiete der Radioaktivität. Die Wissenschaft Bd. 65.) Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. IX, 156 S., 61 Abbildungen. Preis 6 M., geb. 10 M. und Teuerungszuschlag.

Das Buch wendet sich im wesentlichen an den Studenten, der sich mit der experimentellen Radioaktivität näher bekannt machen will. Ein Hauptvorzug des Werkes liegt wohl darin, daß gezeigt wird, wie mit wenig Mitteln die fundamentalen Eigenschaften der radioaktiven Körper beobachtet werden können. Ein einfaches, eventuell selbst herstellbares Elektrometer, für wenig Geld Uran oder Thor genügen, um eine große Reihe interessanter Versuche machen zu können.

In den ersten beiden Kapiteln werden die experimentellen Hilfsmittel, vor allem die in Betracht kommenden Elektrometer beschrieben. Neben den einfachen, selbst herstellbaren Goldblattelektrometern nimmt die Beschreibung, Theorie und Anwendungsweise des Quadrantelektrometers einen ziemlich breiten Raum ein. Eigentümlicherweise wird hingegen das Elster und Geitelsche Elektrometer nicht erwähnt, obwohl gerade dieses Instrument in seinem Gebrauch sehr einfach und wegen der leicht zu verändernden Empfindlichkeit sehr bequem ist. Nachdem die Ionisationserscheinungen in Gasen erläutert worden sind, gehen die Autoren über zur Beschreibung der charakteristischen Versuche mit α-, β- und γ-Strahlen. Reichweitenbestimmungen, Absorptionsmessungen, Szintillationsbeobachtungen, Sekundärstrahlerscheinungen usw. kommen hier zur Besprechung. Auch der radioaktive Rückstoß und die damit zusammenhängenden Erscheinungen werden ausführlich besprochen. — Das nächste Kapitel handelt von den Zerfallsgesetzen und Zerfallsreihen; die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Halbwertszeit werden beschrieben. Besonders wertvoll, auch für den Fachmann der Radiologie, ist der Abschnitt über die Absolutmessungen, wo die reichen Erfahrungen der Autoren gerade auf diesem Gebiet zum Ausdruck kommen. Schließlich werden noch die gebräuchlichsten Trennungsmethoden der verschiedenen Radioelemente besprochen, so daß der Leser auch einen Einblick in die Reichhaltigkeit der Chemie der radioaktiven Stoffe bekommt. Ein Anhang enthält neben einer übersichtlichen Zusammenstellung der wesentlichen radioaktiven Konstanten Tabellen über den zeitlichen Zerfall von Radium-Emanation und der aktiven Niederschläge von *Ra*, *Th* und *Ac* für verschiedene Expositionszeiten, welche Tabellen besonders der Fachmann begrüßen wird, da sie ihm manche Rechnung ersparen. E. Stahel.

The Making of reflecting surfaces. London 1920. The Fleetway Press, Ltd. Preis M. 5 s.

Auf 44 Seiten wird berichtet über eine Reihe von Vorträgen mit Diskussion, gehalten am 26. Nov. 1920 in einer gemeinsamen Sitzung der „Londoner Physikalischen Gesellschaft" und der „Optischen Gesellschaft". Das Thema, im wesentlichen die Versilberung von Glas, wird von den verschiedensten Seiten in interessanter Weise beleuchtet, nachdem eine Übersicht über die bisher vorliegende Literatur (mit Literaturnachweisen) gegeben ist. Verschiedene Methoden der Versilberung werden eingehend mit Angabe praktischer Einzelheiten besprochen. Besonders aus der Diskussion geht hervor, daß die Versilberung mehr eine Kunst ist und sich zurzeit eine Methode zur Erzielung der allerbesten Resultate kaum in Regeln fassen läßt. Debye.

H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen. Erster Band. gr. 8°. VII u. 600 S., m. 18 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1921. M. 136.—

Mathematische Theorien von solcher Allgemeinheit der Begriffsbildung wie die moderne Theorie der reellen Funktionen erscheinen dem Physiker durchweg als bedeutungslos für seine Zwecke, die exakte Erfassung der Wirklichkeit. Ich glaube, daß ihn dieses Gefühl nicht trügt. Der heutige Aufbau der Analysis enthält dadurch, daß er ein System absoluter isolierter Elemente an die Stelle des Kontinuums setzt, ein scholastisches Moment. Bei demjenigen Gebrauch, den der Physiker gemeinhin von der Analysis macht, kommt das kaum zur Geltung, weil hier trotzdem der Übergang von der reinen Theorie zu ihrer Bedeutung für die Wirklichkeit meist ohne weiteres vollzogen werden kann; für die allgemeinen Sätze der reellen Funktionentheorie steht es aber in dieser Hinsicht ganz anders. Deshalb bin ich auch überzeugt, daß bei einer wirklich stichhaltigen und mit dem anschaulichen Sinn in klarer Übereinstimmung stehenden Fundierung der Analysis diese Theorie zum großen Teile sich als haltlos herausstellen wird.

Das Hahnsche Buch geht auf diese kritischen Fragen nicht ein. Dafür zeigt es, dank der Klarheit und Ordnung der Darstellung, in unübertrefflicher Weise die strenge formal-logische Folgerichtigkeit, welche man dem heute Geltung besitzenden Aufbau der Analysis nicht absprechen kann. Es ist gewiß richtig, wenn Hahn in seinem Vorwort betont, daß die Lehre von den reellen Funktionen längst nicht mehr, wie vielleicht zu Anfang ihrer Entwicklung, eine Sammlung merkwürdiger, „pathologischer" Vorkommnisse ist, sondern allgemeine Gesetze ihren Inhalt bilden. In ihr hat man gewisse allgemeine Schlußweisen, die immer wieder in speziellen Fragen der Analysis auftreten, isoliert; das ist berechtigt und kommt der Ökonomie der Wissenschaft zugute. Dennoch kann man nicht leugnen, daß der tiefere Gehalt an mathematischen Gedanken, von der Bildung der ersten Grundbegriffe abgesehen, in diesem Felde recht dürftig ist, daß man geistvolle mathematische Konstruktion immer noch fast nur in der Herstellung einzelner merkwürdiger Funktionen, die als Gegenbeispiele dienen, antrifft.

Auf den Inhalt im einzelnen einzugehen, ist für den Physiker kaum von Interesse; vielleicht wird dazu der zweite Band Gelegenheit bieten, der die Theorie der Integration und Differentiation, die Darstellung willkürlicher Funktionen und die Fourierschen Reihen enthalten soll. Weyl.

H. Reichenbach, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori. kl. 8°. 110 S. Berlin, Julius Springer. 1920. M. 14.—

In den ersten Abschnitten dieser Schrif möchte der Verf. zeigen, daß gewisse allgemein zugestandene Prinzipien zufolge der Erfahrungstatsache, daß schwere und träge Masse einander gleich sind, mit der Euklidizität des Raumes in Widerspruch stehen. Er meint, dadurch die Überlegungen, welche Einstein zur allgemeinen Relativitätstheorie führten, zu einem streng axiomatischen Beweis umformen zu können. Der Widerspruch wird aber gar nicht durch jene positive Tatsache herbeigeführt (das ist ja auch undenkbar), sondern stellt sich erst ein, wenn man sie nicht einfach als Naturgesetz hinnehmen, sondern auf die Einsteinsche Weise begreifen will. Der geniale Gedanke läßt sich offenbar nicht so schematisieren, wie es hier versucht wird.

Viel bedeutungsvoller erscheint mir der zweite Abschnitt, ein neuer Versuch, das in der physikalischen Wissenschaft neben der Erfahrung eine wichtige Rolle spielende apriorische Element zu erfassen. Mit Schlick wird die Erkenntnis der Außenwelt als „Zuordnung", ihre Wahrheit als Eindeutigkeit der Zuordnung beschrieben. Das Apriorische sind die Zuordnungs-Prinzipien. Von den beiden Kantischen Merkmalen des Apriori, nämlich „den Gegenstandsbegriff konstituierend" und „apodiktisch gültig", nimmt Reichenbach nur das erste für die Zuordnungsprinzipien in Anspruch. Die Relativitätstheorie ist ein Beispiel dafür, wie die Entwicklung der Wissenschaft zu einer Abänderung und Erweiterung der Zuordnungsprinzipien führen kann, wenn die Erfahrung zeigt, daß sich mit Hilfe der bisher benutzten Prinzipien Eindeutigkeit nicht herstellen läßt. „Nicht darin drückt sich der Anteil der Vernunft aus, daß es unveränderliche, sondern darin, daß es willkürliche Elemente des Zuordnungssystems gibt." Der Verf. kennzeichnet seine Methode als wissenschaftsanalytische. Der Versuch Kants, meint er, die Prinzipien aus der Vernunft zu entnehmen, muß als gescheitert betrachtet werden; statt dessen bleibt nichts anderes übrig, als festzustellen, welches die in der Erkenntnis tatsächlich angewandten Prinzipien sind. Als Beispiel der Wandlung der Gegenstandsbegriffe führt er den Übergang von der Physik der Kräfte und Dinge zu der Physik der Feldzustände an. Weyl.

E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen. gr. 8°. 134 S. Berlin. Bruno Cassirer. 1921. M. 14.—

Bestimmend für Cassirers Stellung zur Relativitätstheorie ist die philosophische Grundhaltung, die durch den Wahrheitsbegriff des kritischen Idealismus am besten charakterisiert ist. Für diesen ist das Erkennen kein Abbilden eines transzendenten absoluten Dinges im Bewußtsein; jedes Ich umfaßt und regelt vielmehr nach eigenem Gesetze das Ganze seiner Vorstellungsinhalte. Hinter den Weltbildern der einzelnen Individuen steht nicht ein gemeinsames Original, dessen Kopien sie wären, sondern in den inneren Beziehungen und der gemeinsamen Form ihres Aufbaus entsprechen sie einander funktional. Diesem Sinn von Erkenntnis und wirklichem Gegenstand fügt sich die Relativitätstheorie ohne Schwierigkeit ein. Ihrem Grundgedanken nach kann durch Messung weder in einem noch in beliebig vielen Einzelsystemen ein Ausdruck für die Gesetzlichkeit der Erfahrung erlangt werden (wie es keinen Sinn hat, nach der absoluten Gestalt eines Körpers zu fragen, der als Kugel in einem, als Rotationsellipsoid in einem anderen Koordinatensystem erscheint); nur die gesetzmäßige Zuordnung der Messungsresultate in allen möglichen Bezugssystemen ergibt das Naturgesetz.

Der zweite Teil des Buches ist der Auseinandersetzung des kritischen Idealismus mit den Raum-Zeit-Begriffen der Relativitätstheorie gewidmet. Aufgabe der Physik ist: die Mannigfaltigkeit reiner Form- und Ordnungsfunktionen, in denen sich die Möglichkeit der Erfahrung ausdrückt, anzuwenden auf die Mannigfaltigkeit des Sinnlich-Gegebenen. Sie ist dabei streng gebunden an die Eigenschaften von Raum und Zeit, die Kant als gefordert durch die Möglichkeit der „reinen Anschauung" bezeichnet; denn diese konstituieren überhaupt erst den Begriff der Koinzidenz, des Neben- und Nacheinander, worauf die Physik die Form und den Inhalt ihrer Gesetze zuletzt zurückführt. Über die besonderen Maßverhältnisse ist darin jedoch (hierin irrt Kant) noch nichts behauptet. Die Frage, ob der wirkliche Raum euklidisch sei oder nicht, ist eine empirische und ohne ontologische Bedeutung. Es handelt sich lediglich darum, unter den der Möglichkeit nach vorliegenden Geometrien diejenige zu finden, welche die einfachste Formulierung der Naturgesetze gestattet.

Zum Schluß erinnert der Verfasser daran, daß neben der physikalischen Art der Weltbetrachtung gleichberechtigt andere Arten der Form- und Sinngebung stehen (die ästhetische, historische, religiöse), daß keine den Anspruch erheben darf, „die Wirklichkeit" zu erschöpfendem Ausdruck zu bringen, daß vielmehr letzte eindeutige Wirklichkeit nichts anderes ist als eine Totalität von Bestimmungen, zu denen jede einzelne Erfahrungsart innerhalb ihrer Grenzen beizutragen hat. Weyl.

Handbuch der Arbeitsmethoden in der anorganischen Chemie, herausgegeben von Arthur Stähler; zweiter Band, erste Hälfte: Physikalische Operationen allgemeiner Art. 654 S. Mit 390 Abbildungen. Berlin und Leipzig, Vereinigung wissenschaftl. Verleger. 1919. M. 45.—.

So wertvoll und notwendig die Herausgabe wissenschaftlicher Handbücher ist, so schwierig ist es im allgemeinen, die Einheit des zeitlichen Erscheinens der verschiedenen Bände und die Berücksichtigung der letzten wissenschaftlichen Fortschritte zu erreichen. Berücksichtigt man dies und dazu die außergewöhnliche Ungunst der Zeiten, so muß es dem Herausgeber und Verlag als großes Verdienst angerechnet werden, die Drucklegung dieses Werkes ermöglicht und nunmehr die erste Hälfte des zweiten Bandes zum Erscheinen gebracht zu haben.

Dieser Band behandelt die physikalischen Operationen allgemeiner Art, und zwar Druckmessung (Scheel und Heuse, Meinecke), Evakuieren und Komprimieren (Bergius), Verdichten von Gasen (Birstein), Herstellen verschiedener Temperaturen, Temperaturbestimmung (Hoffmann), Allgemeines über Erhitzen und Abkühlen (Stähler), Feuerfeste Massen und Gefäße für hohe Temperaturen (Groschuff), Abdampfen (Stähler), Destillieren und Sublimieren (Krafft), Fällen (Richards), Kristallisieren (Richards), Schmelzen (v. Wartenberg), Trocknen (Stähler), Lösen (Stähler), Mikroskopie (Ehlers), Spektoskopie (Konen), Kolorimetrie (Löwe).

Die Darstellung ist durchwegs eingehend und elementar gehalten und in zweckmäßiger Weise den Bedürfnissen des Chemikers angepaßt (besonders auch der Artikel von Konen über Spektroskopie). Den praktischen Gesichtspunkten des Werkes entsprechend nimmt die Beschreibung von Apparaten einen breiten Raum ein. Leider konnten teilweise neuere Methoden und Apparate nicht mehr angeführt werden. So werden bei der Messung kleiner Drucke die Hochvakuum-Manometer nicht behandelt und entsprechend fehlt im Abschnitt „Evakuieren und Komprimieren" die Besprechung der Diffusions- und Kondensationspumpen. In der Vollständigkeit der Literaturnachweise verhalten sich die verschiedenen Autoren verschieden. Im allgemeinen macht gerade ein zuverlässiger Literaturnachweis ein Handbuch wertvoll, dabei sollten auch Sammelwerke und Monographien inbegriffen sein. So hätte im Abschnitt „Temperaturmessung" das Buch von F. Henning vielleicht doch erwähnt oder nachgetragen werden dürfen.

Das Buch ist für den Chemiker sicherlich von größtem Wert; der Physiker greift vielleicht lieber zur physikalischen Fachliteratur; aber auch ihm bieten die verschiedenen Abschnitte viel Wertvolles. Tank.

F. Ambrosius, Grundzüge der Schwachstromtechnik. Ein Leitfaden für Studierende der Elektrotechnik und für Starkstromtechniker. 298 S. Mit 146 Abbildungen im Text. Leipzig, S. Hirzel. 1921. Geheftet M. 70.20, gebunden M. 80.60.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Studierende und Techniker, die einen Überblick über die Grundlagen der Schwachstromtechnik zu erhalten wünschen; es hat daher vollständig den Charakter eines Leitfadens. Die Auswahl des Stoffes beschränkt sich, bei gleichmäßiger Berücksichtigung des Gesamtgebietes, auf die Erläuterung der Grundzüge und einzelner typischer Beispiele. Die technische Seite ist gegenüber der theoretischen stark betont; ebenso ist der mathematische Apparat möglichst reduziert. Die Darstellung ist in anschaulicher Breite gehalten und wird durch gut ausgewählte Illustrationen und Schaltungsskizzen unterstützt. Kleine Mängel in der Präzision des Ausdruckes (S. 235 „Gasentladung im luftleeren Raum" u. dergl.) mögen in einer nächsten Auflage behoben werden. Im ganzen kann das Werkchen, als angenehme und instruktive Lektüre, empfohlen werden. Tank.

L. Silberstein, Report on the Quantum theory of spectra. 42 S. m. 3 Abbildungen. 1. Auflage. London, Adam Hilger Ltd. 1920.

Das Büchlein gibt in referierender Art eine nette Zusammenstellung der Hauptresultate der Arbeiten von Bohr, Sommerfeld und Epstein. Die Entwicklung der Formeln wird nur in den wesentlichsten Punkten angedeutet. Auf das prinzipielle Problem der Quantelung wird nicht eingegangen. Ebenso wären wohl auch einige Worte über die Theorie der Bandenspektren am Platz gewesen. Die seit 1918 erschienenen Arbeiten sind überhaupt nur in einigen Sätzen gestreift. Der Verfasser schreibt selbst, daß die Arbeit sehr unvollständig sei und deshalb bald eine Ergänzung folgen müsse. F. Zwicky.

A. Schaub, Statik. 2. Auflage (Aus Natur und Geisteswelt. Nr. 828). 110 S. Mit 112 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1921. Kart. M. 2,80, geb. M. 3,50.

In leicht verständlicher, ohne besondere mathematische Vorkenntnisse erheischender Weise gibt der Verfasser einen Überblick über die Grundgesetze der analytischen und graphischen Statik mit Anwendungen auf den Maschinen- und Tiefbau. Es werden die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für ein ebenes Kräftesystem entwickelt, dann hauptsächlich die graphische Bestimmung der Querkräfte und Momente für ständige Last durch Querkrafts- und Momentenfläche, für Verkehrslast durch Einflußflächen, für den einfachen Balken gezeigt. Für die Ermittlung der Stabkräfte von Fachwerken werden die Rottersche Momentenmethode sowie der Cremonaplan angewandt. Kapitel IX gibt einen Einblick in die Gewölbeberechnung nach der alten Stücklinienmethode. Die genauere Berechnung derselben mußte natürlich unterbleiben, da das Eindringen in die Elastizitätstheorie und ihre Anwendung auf die statisch unbestimmten Systeme bereits außerhalb des Rahmens der betreffenden Büchersammlung liegt. Bolliger.

A. Kopff, Die Einsteinsche Relativitätstheorie. 8°. 24 S. Leipzig, Verlag der Leipziger Lehrerzeitung, in Komm. Gressner & Schramm, 1920. M. 1.50

Das kleine Heftchen, welches einem im Jahre 1920 im Naturhistorisch-medizinischen Verein zu Heidelberg gehaltenen Vortrag seine Entstehung verdankt, stellt den wohlgelungenen Versuch dar, dem gebildeten Laien ohne Anwendung mathematischer Formeln einen Begriff von dem Wesen und der Bedeutung der Einsteinschen Theorie zu geben. Der Verfasser betont dabei mit einer sonst in allgemeinverständlichen Darstellungen nicht immer gewahrten Wissenschaftlichkeit, daß noch manche Probleme der Theorie, so z. B. das Rotationsproblem, ihrer Lösung harren, glaubt jedoch die Ansicht aussprechen zu dürfen, daß die weitere Entwicklung der Theorie einen für die Einsteinsche Theorie günstigen Verlauf nehmen wird.
E. Hückel.

C. Isenkrahe, Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie. gr. 8°. 133 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1921. M. 6.— + Teuerungszuschlag.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die „Grundbegriffe" (die nicht definiert werden), die „Arbeitsbegriffe" (die definiert werden) und die „Grundsätze" (Axiome oder „Uhbuntsätze" (!), d. h. unbewiesen hingestellt Beweisunterlagen) der allgemeinen Relativitätstheorie aus der Theorie herauszuschälen und klarzulegen. Das Verfahren, welches zur Lösung dieser Aufgabe führen soll, nennt er „Elementaranalyse" in nicht gerade glücklich gewählter Analogie zur Elementaranalyse der Chemie. Wegen der überaus großen Arbeit, die eine vollständige Erledigung dieser Aufgabe erfordern würde, beschränkt er sich auf die „Einleitung und Vorstufen zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie".

Man kann nicht leugnen, daß eine wirkliche Klarlegung derjenigen Begriffe und Axiome, welche der

Relativitätstheorie zugrunde liegen, eine verdienstvolle Arbeit wäre. In der Hoffnung, eine Arbeit dieser Art zu finden, nimmt man das Buch zur Hand, ist aber schnell enttäuscht, denn von einer wirklichen Klarlegung der Begriffe und Axiome in diesem Buche kann keine Rede sein. Es sind vielmehr fast nur Haarspaltereien, die sich an bestimmte Worte und Sätze klammern, welche sich in der Einleitung des bekannten Buches von Weyl: Raum, Zeit, Materie finden. Wo wirklich Fragen angeschnitten werden, deren Beantwortung für die Entscheidung zwischen der alten Auffassung und der Auffassung der Relativitätstheorie von Bedeutung ist, sind diese Fragen so allgemein gefaßt, daß der Physiker mit ihnen nichts anzufangen vermag. Zur Erhärtung dieser beiden Behauptungen nur je ein Beispiel: Auf Seite 18 wird ein Satz aus der Einleitung des Weylschen Buches zitiert: „Ein bestimmtes Materienstück erfüllt in einem bestimmten Augenblick einen bestimmten Raumteil". Der Verfasser knüpft daran längere Erörterungen mit dem Resultat, daß man statt dessen zu sagen hat: „Ein unverwechselbar gekennzeichnetes Materienstück M erfüllt in einem unverwechselbar gekennzeichneten Zeitmoment Z einen unverwechselbar gekennzeichneten Raumteil R"; auf Seite 27 wird folgende „Wegscheide" aufgestellt, an der sich die Physik für den Weg a oder b entscheiden muß:

„Das Wort ‚Augenblick' bedeutet ein Etwas (!), dessen Geltung

a) unabhängig,

b) abhängig,

ist von der Bezugnahme auf irgendein sonstiges Etwas (!), mag es sich bei diesen um eine Existenz oder ein Geschehnis handeln". Was soll der Physiker mit dieser Wegscheide anfangen? Was soll ihn auf den einen oder anderen Weg führen? — Es mag genügen mit diesen beiden Beispielen dem Leser einen Begriff von der Art des Buches gegeben zu haben. Ein weiteres Eingehen auf dasselbe erscheint dem Referenten im Hinblick auf den so geringen Wert, welchen es für den Physiker besitzt, nicht angezeigt.

E. Hückel.

L. Walther, Dynamik der Leistungsregelung von Kolbenkompressoren und -pumpen (einschl. Selbstregelung und Parallelbetrieb.) gr. 8°. VII u. 150 S. Mit 44 Abbildungen, 23 Diagrammen u. 85 Zahlenbeispielen. Berlin, Julius Springer. 1921. M. 24.—, geb. M. 30.—.

Die Arbeit befaßt sich mit den Regelungsvorgängen bei Antrieb von Kolbenkompressoren und -pumpen durch Dampfmaschinen, und behandelt verschiedene Kombinationen der gebräuchlichen Regelungsarten mit Berücksichtigung der jeweiligen Selbstregelungseigenschaften. Die zur Vereinfachung der Rechnungen getroffenen Annahmen sind, stellenweise sehr weitgehend, wie z. B. auf S. 20, wo die zeitliche Änderung des Windkesseldruckes infolge Luftentnahme berechnet wird und dabei angenommen wird, die Luft ströme mit Schallgeschwindigkeit ab, was mit der wenige Zeilen weiter oben enthaltenen Aussage, die Luftverbraucher seien Apparate und Maschinen, in denen Druckluft Arbeit leistet, denn doch in argem Widerspruche steht. Derartiger Rechnungsweise wird aber der Physiker nicht viel Interesse entgegenbringen können.

Hans Steiner.

K. Baetz, Ein neues Prinzip für Dampf- und Gasturbinen. gr. 8°. 80 S. mit 24 Fig. im Text und auf einer Tafel. Leipzig, Otto Spamer. 1920. M. 12.—.

Der Verfasser beschäftigt sich mit dem Problem einer Zellenturbine und als Einleitung hierzu mit rein theoretischen Untersuchungen über Ausgleichvorgänge an Schraubenfedern, Gassäulen u. a. Das Prinzip eines Zellenrades besteht in dem Verdichten eines Zelleninhaltes durch Nachströmen von Gas aus andern Zellen mit höherem Druck. Eine in Schanghai gebaute Versuchsmaschine ergab einen thermodynamischen Wirkungsgrad von 29 v. H. Verfasser selbst macht aufmerksam auf die konstruktiven Schwierigkeiten der beschriebenen Bauart und schlägt verschiedene Verbesserungen vor. Es bleibt abzuwarten, ob neue Versuche günstigere Resultate zeitigen werden.

Karl Kraut.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Kiel Dr. Werner Schmeidler zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau, der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Robert König zum ord Professor der Mathematik ebenda, der frühere ord. Professor der Physik an der Akademie in Posen Geh. Regierungsrat Dr. Paul Spies zum Direktor der Medizinisch-Technischen Company in Berlin.

Berufen: Der a. o. Professor der Physik an der Universität Berlin Dr. Wilhelm H. Westphal zum Hilfsarbeiter in das Preußische Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung (unter Beibehaltung seiner bisherigen Lehrtätigkeit).

Vom Lehramt zurück: Der Professor der Chemie an der Universität Manchester H. B. Dixon.

Gestorben: Der emer. ord. Professor der Physik und Maschinenkunde an der landwirtschaftlichen Hochschule Bonn-Poppelsdorf Geh. Regierungsrat Dr. Eberhard Gieseler, der frühere Mathematiker und Physiker und philosophische Schriftsteller Josef Popper-Lynkeus (vgl. diese Zeitschr. 19, 57, 1918; zu seinem achtzigsten Geburtstag), der Präsident der Accademia Romana dei Nuovi Lincei und Vizedirektor der Specola Vaticana (Vatikanische Sternwarte) Rev. P. Guiseppe Lais.

Angebote.

Ingenieur oder Physiker

zur Leitung eines Laboratoriums für Metallprüfung

(technologische und chemische Abteilung) möglichst aus der elektrotechnischen Industrie gesucht. Bedingung: Gründliche Erfahrung auf obigen Gebieten. Erwünscht: Kenntnisse der Chemie und Metallographie. Bewerbungen mit ausführlichem Lebenslauf, Lichtbild, Gehaltsansprüchen und frühestem Eintrittstermin unter Aufgabe von Referenzen erbeten unter **S. H. 589** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstr. 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.

50471. Experimentier-Schalttafel Type A_1, 110 Volt, 30 Amp.

Physikalische Apparate

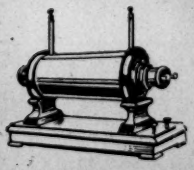
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Physikalische Apparate für Schulen

JULIUS KRÄCKER
BERLIN-NEUKÖLLN



Funkeninduktoren
Hochspannungsapparate
Ausrüstung von Kabinetten

Inhaltsverzeichnis:

(B. — Besprechungen.)

Seite

Arkadiew, W., Über die Herstellung von schwachgedämpften kurzen Hertzschen Wellen. Versuche von B. Milentz 35

Astronomie: Über die astronomischen Arbeiten von Gauß. Erster Abschnitt: Theoretische —, v. M. Brendel. (B.) 56

Atome: Folgerungen aus der Kugelform der einfachsten — (mit Modellen), v. L. Zehnder 53

Brendel, M., Über die astronomischen Arbeiten von Gauß. Erster Abschnitt: Theoretische Astronomie. (B.) 56

Burmeister, Fr., Bemerkung zu Ludwig Geiger: „Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten" 45

Chininsulfat: Weitere Untersuchungen über Entladungserscheinungen des leuchtenden —, v. A. Kalähne. 45

Dingler, H., Die Rolle der Konvention in der Physik 47

Entladungspotentiale: Über die — für schnelle elektrische Schwingungen, v. A. Leontiewa 33

Erdbeben: Bemerkung zu Ludwig Geiger: „Herdbestimmung bei — aus den Ankunftszeiten, v. Fr. Burmeister 45

Seite

Gauß: Über die astronomischen Arbeiten von —. Erster Abschnitt: Theoretische Astronomie, v. M. Brendel. (B.) 56

Geiger: Bemerkung zu L. —: „Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten, v. Fr. Burmeister 45

Gröber, H., Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. (B.) 56

Hertzsche Wellen: Über die Herstellung von schwachgedämpften kurzen —. Versuche von B. Milentz, v. W. Arkadiew 35

Kalähne, A., Weitere Untersuchungen über Entladungserscheinungen des leuchtenden Chininsulfates . . . 45

Konvention: Die Rolle der — in der Physik, v. H. Dingler 47

Lanolin: Studien über die Doppelbrechung des —, v. H. Rohmann 39

Leontiewa, A., Über die Entladungspotentiale für schnelle elektrische Schwingungen 33

Lichtenecker, K., Das Zuordnungsproblem der Strahlentheorie, für zwei Arten von Individuen, auf symmetrische Form gebracht. I. 45

Milentz: Über die Herstellung von schwachgedämpften kurzen Hertzschen Wellen. Versuche von B. —, v. W. Arkadiew 35

(Fortsetzung auf Seite III.)

Ingenieur

mit Neigung zum begrifflichen Denken, schriftgewandt, für die Patentbearbeitung auf dem Gebiet der Fernsprechtechnik gesucht. Erfahrungen im Patentwesen nicht unbedingt erforderlich, englische Sprachkenntnisse dagegen unerläßlich. Schriftl. Angebote mit Zeugnisabschriften, Lichtbild, Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten unter dem Kennwort „Patentbearbeitung" an die Angestellten-Vermittlungsstelle bei den Direktionen der

SIEMENSFIRMEN

Verwaltungsgebäude SIEMENSSTADT bei BERLIN

Въ современныхъ, новыхъ государства потребуются въ такихъ современныхъ, но общеизвѣстныхъ приборахъ какъ

Барреттеръ измерительный приборъ Гати для высокихъ напреженіе и для телефона.

Цѣна Руб. 2500 —

Béla Gáti,

Budapest IX, Gyáli-ut. 22.

Адр. Тел.: Belagatt Budapest.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250 314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.